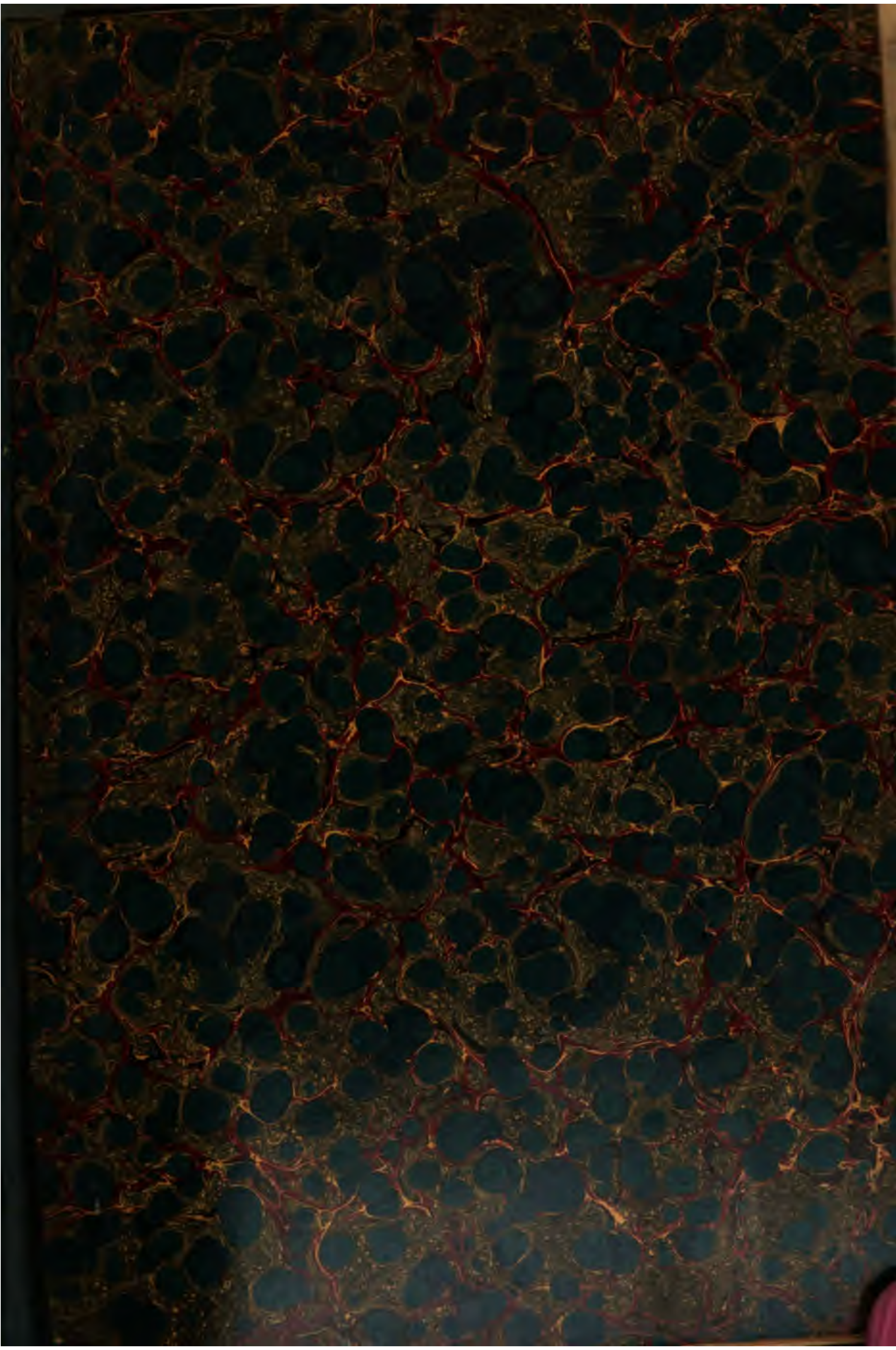
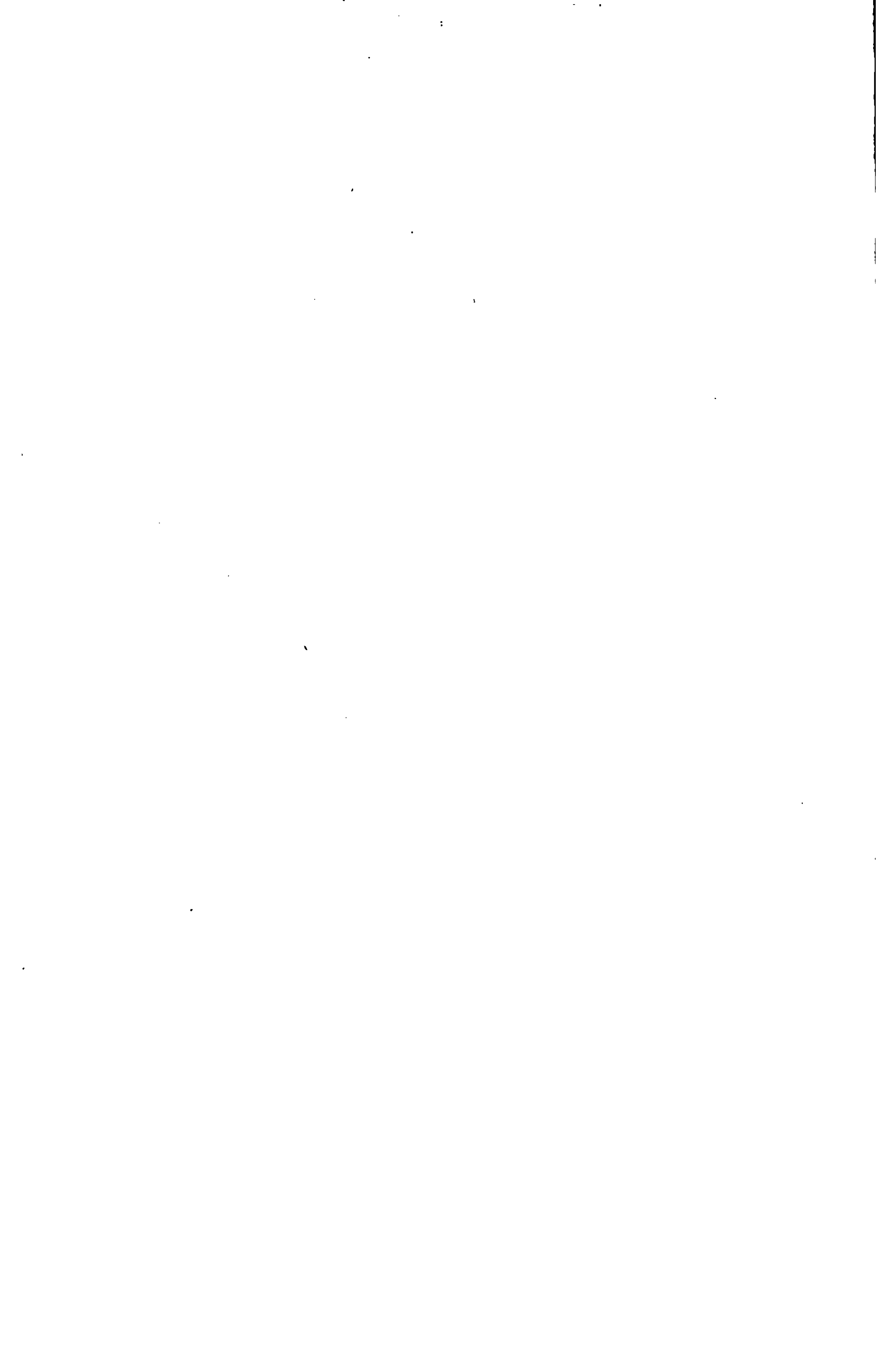










LEHRBUCH

DER

LANDKARTENPROJEKTIONEN.

VON

DR. NORBERT HERZ,

LEITER DER VON KUFFNER'SCHEN STERNWARTE IN WIEN,
MITGLIED DER ASTRONOMISCHEN GESELLSCHAFT,
EMERIT. ASSISTENT FÜR ASTRONOMIE UND HÖHERE GEODÄSIE AN DER K. K. TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN WIEN.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1885.

SEINEN HOCHVEREHRTEN LEHRERN

HERRN

PROF. Dr. JOS. PH. HERR,

K. K. MINISTERIALRAT, PROFESSOR DER ASTRONOMIE UND HÖHEREN GEODÄSIE AN DER K. K. TECHN. HOCHSCHULE IN WIEN, DOCTOR DER PHILOSOPHIE, DIRECTOR DER K. K. NORMAL-AICHUNGS-COMMISSION, MITGLIED DES INTERNATIONALEN COMITÉS FÜR MASS UND GEWICHT, MITGLIED DER INTERNATIONALEN COMMISSION DER EUROPÄISCHEN GRADMESSUNG, RITTER DES KAIS. ÖSTERREICH. ORDENS DER EISERNEN KRONE III. CL., GROSSOFFICIER DES KÖNIGL. SERBISCHEN TOKOWAORDENS.

UND

HERRN

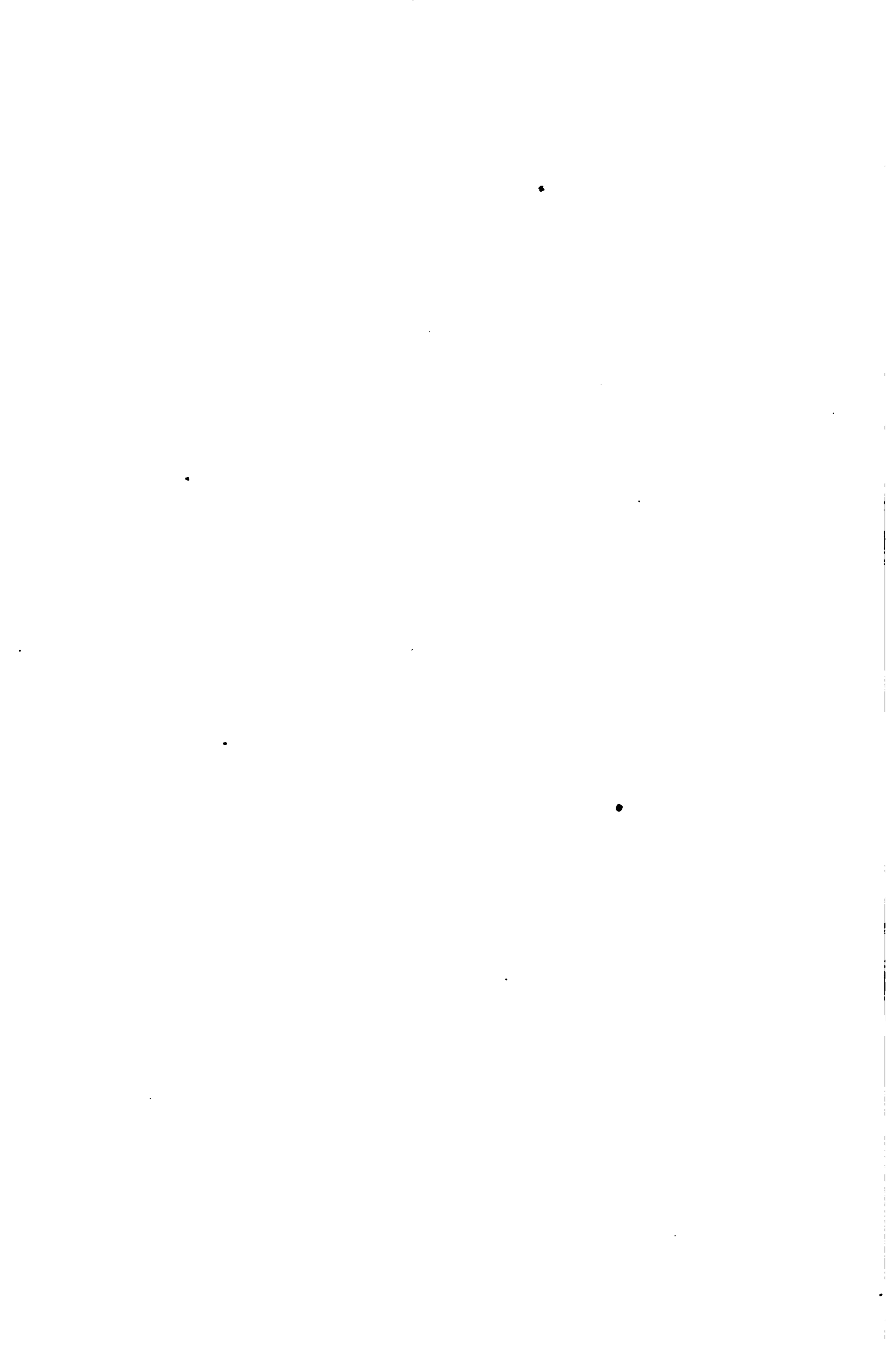
PROF. Dr. THEOD. RITTER v. OPPOLZER,

K. K. HOFRAT, PROFESSOR DER ASTRONOMIE UND HÖHEREN GEODÄSIE AN DER K. K. UNIVERSITÄT IN WIEN, DOCTOR DER MEDIZIN, MAGISTER DER MATHEMATIK UND DOCTOR DER PHYSIK HONORIS CAUSA VON DER UNIVERSITÄT LEYDEN, RITTER DES ORDENS DER EISERNEN KRONE III. CL., COMMANDEUR DES KAIS. RUSSISCHEN ST. ANNEN-ORDENS, COMMANDEUR DER KÖNIGL. ITALIENISCHEN KRONE, COMMANDEUR DES ORDENS DES RUMÄNISCHEN STERNES, OFFICIER DER FRANZÖSISCHEN EHRENLEGION, RITTER DES KÖNIGL. PREUSS. ROTHEN ADLER-ORDENS III. CL., WIRKLICHES MITGLIED DER KAIS. ACADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN WIEN, VORSTANDS-MITGLIED DER INTERNATIONALEN ASTRONOMISCHEN GESELLSCHAFT, SECRETÄR DER PERMANENTEN COMMISSION DER EUROPÄISCHEN GRADMESSUNG, CORRESPONDANT DE L'INSTITUT DE FRANCE (ACADEMIE DES SCIENCES), ASSOCIATE OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY IN LONDON, FOREIGN ASSOCIATE OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES IN WASHINGTON, EHRENMITGLIED DER GEOGRAPHISCHEN GESELLSCHAFT IN BUKAREST UND DER SOCIÉTÉ DE PHYSIQUE ET D'HISTOIRE NATURELLE IN GENF, CORRESPONDIRENDES MITGLIED DER KÖNIGL. BAYR. ACADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN MÜNCHEN UND DER NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT IN JASSY

IN TIEFSTER VEREHRUNG

GEWIDMET

VOM VERFASSER.



VORWORT.

Die Lehre von den Landkartenprojektionen bildet seit Jahren an der technischen Hochschule zu Wien einen integrierenden Bestandtheil der Vorlesungen über höhere Geodäsie. Doch scheint mir ein den Anforderungen der Jetztzeit entsprechendes, alle neuen Untersuchungen umfassendes Lehrbuch zu fehlen. Die älteren Werke von *J. T. Mayer* (Vollständige und gründliche Anleitung zum Entwerfen von Land-, See- und Himmelskarten), *Lambert* (Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung III.), *Puissant* (traité de topographie), *Francoeur* (Geodésie), *Littrow* (Chorographie) und selbst noch *Gretschel* (Lehrbuch der Landkartenprojektionen) sind wol heute schon als veraltet zu betrachten, da seither auf die neuen, epochemachenden Untersuchungen von *Tissot* Rücksicht genommen werden muss. Von neueren Werken auf diesem Gebiete ist zu nennen: *Steinhauser* (Grundzüge der mathematischen Geographie), *Möllinger* Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojektionen) und *Zöppritz* (Leitfaden der Kartenentwurfslehre), welche den Gegenstand mehr von der praktischen Seite, ohne oder nur mit sehr wenig mathematischer Begründung, zum Theil, wie die beiden ersten, nur sehr unvollständig behandeln. Ein deutsches Werk, das, vorzugsweise vom theoretischen Standpunkte ausgehend, eine Entscheidung über die Güte der Projektionsmethoden geben und als Lehrbuch an technischen Hochschulen dienen könnte, giebt es nicht, und so glaubte ich durch das vorliegende Werk eine Lücke auszufüllen. Ich bin dabei einer anderen Anordnung gefolgt, als *Tissot* in seinem „Memoire sur la réprésentation des surfaces et des cartes géographiques", welches Werk wol weniger als Lehrbuch dienen soll, und überdies mehr den geometrischen Standpunkt vertritt. *Germain* nimmt in seinem Werke „Traité des projections des cartes géographiques" wol die Untersuchungen *Tissots* auf, jedoch in einer für ein Lehrbuch nicht hinreichend ausführlichen Weise. Auch die *Tissot*'sche compensative Projektion wird nur auszugsweise mitgetheilt. Vom analytischen Standpunkte aus sind diese Theorien in dem vortrefflichen Lehrbuche von *Fiorini* „Le projezioni delle carte geografiche" im ersten Kapitel behandelt, und auf Grund

derselben die einzelnen Projektionsmethoden erläutert. Ich glaubte jedoch einen anderen Weg einschlagen zu müssen; ich habe die abstrakten Theorien nicht an die Spitze des Werkes gestellt, sondern in den ersten drei Kapiteln für jede Projektionsklasse die mathematischen Beziehungen (Vergrösserung und Winkeländerung) für sich abgeleitet und dabei nur jene mathematischen Kenntnisse vorausgesetzt, welche man durch ein einjähriges Studium an einer Hochschule erlangen kann, und erst im 4. Kapitel die vollständige mathematische Theorie mit ihren Anwendungen auf die verschiedenen in den ersten drei Kapiteln behandelten und auf die conformen Abbildungen gegeben, was, wie ich glaube, zum Verständnis wesentlich beitragen dürfte. Übrigens kann dieses letzte Kapitel vom Praktiker, welcher in den abstrakten Theorien nicht so eingeführt ist, auch zum grossen Theile überschlagen werden.

Mit Rücksicht auf den Zweck des Buches, als Lehrbuch für technische Hochschulen zu dienen, an denen ja strenge mathematische Begründung gefordert werden kann, ist hierauf im weitesten Sinne des Wortes Rücksicht genommen. Bekanntlich ist jedoch auch die descriptive oder sogenannte darstellende Geometrie Lehrgegenstand an der technischen Hochschule und kann die Vertrautheit des Technikers mit den Grundlehren derselben wol vorausgesetzt werden; sie wurden deshalb im ersten Kapitel, welches von den perspektivischen Projektionen handelt, zur Zeichnung der Kartennetze herbeigezogen. Für den Geographen wird dies allerdings vielleicht ein Übelstand sein, indem er der Darstellung anfänglich nur schwerer wird folgen können; da jedoch nur eine gewisse, leicht zu erlangende Fähigkeit zur Vorstellung der vorzunehmenden graphischen Operationen erforderlich ist, so wird er sich auch sehr bald mit derselben vertraut gemacht haben.

Was die Nomenclatur anbelangt, so muss bemerkt werden, dass die ungerechtfertigten Namen der Projektionen, so oft dies historisch nachweisbar war, verlassen, und dieselben nach dem Vorschlage *D'Avezac*'s (Coup d' oeil historique sur les projections des cartes de géographie im Bulletin de la Société de géographie de Paris, 1863, Serie V, Bd. V, pag. 351) durch die richtigen, nach den Namen derjenigen Autoren, welche durch historische Rechte darauf begründeten Anspruch haben, ersetzt wurden. Doch konnten die betreffenden historischen Notizen nur in sehr beschränktem Masse Aufnahme finden, und muss bezüglich des geschichtlichen Theiles auf andere Werke verwiesen werden. Man sehe hierüber:

Barbier-Dubocage: „Notice historique sur la construction des cartes géographiques“ im „Mémorial du dépôt de la guerre de Paris, Band I.

Le-Monnier: „Zur Geschichte der Kartographie“ in der „Deutschen Rundschau für Geographie und Statistik“, I. Jahrg. 1879.

D'Avezac: „Coup d' oeil historique sur les projections des cartes de géographie“ im „Bulletin de la Société de Géographie de Paris“ 1863, Serie V, Bd. V.

Jomard: „Introduction aux monuments de la géographie, publiée par les soins de *M. E. Cortambert*“ im „Bulletin de la Société de Géographie de Paris“, 1879, Bd. 17 und 18.

Fiorini: „Le Projezioni delle carte geografiche“.

Schliesslich kann ich nicht umhin, allen denjenigen, welche mich bei der Redaktion des vorliegenden Werkes unterstützt haben, meinen wärmsten Dank auszusprechen; insbesondere meinen beiden hochverehrten Freunden Herrn k. k. Major *Robert Daublebsky von Sterneck* und Herrn k. k. Hauptmann *Franz Netuschill*, durch deren Güte ich sehr viel schätzbares Material aus dem Archive des k. k. militär-geographischen Institutes verwenden konnte; ferner dem Herrn Dr. *Joseph Kaltenleitner*, Scriptor an der k. k. Hofbibliothek, der mir in gewohnter Liebenswürdigkeit die reichen Hilfsmittel dieser Bibliothek zur Verfügung stellte.

Wien im October 1885.

Der Verfasser.

INHALTSVERZEICHNIS.

REGISTER.

BERICHTIGUNGEN UND ZUSÄTZE.

Pag. 13. Zeile 5 v. o. Die Gleichung muss lauten: $k^2 = k_1^2 \cos \omega^2 + k_2^2 \sin \omega^2$.

„ 21 „ 15 v. o. lies $\cot \lambda$ statt $\cos \lambda$.

„ 47 „ 9 v. o. lies $x = r \operatorname{tg} \lambda$ statt $x = \operatorname{tg} \lambda$.

„ 72 „ 10 v. u. lies $k_1 = (1 + x) \frac{1 + x \cos v}{(x + \cos v)^2}$.

„ 76. Die Gleichung (21 b) muss lauten $K' = \frac{4}{27} \frac{(a+p)^2 a^3}{(a^2 - r^2)^2 r}$.

„ 79. Zeile 4 v. u. lies *Mercator*'sche statt *Ptolemäische*.

„ 81 „ 3 v. u. ist hinzuzufügen: „also positiv, wenn die Breite des betrachteten Punktes kleiner als die des Kartenmittelpunktes ist“.

„ 84. Zeile 7 und 9 v. u. sind die Minuszeichen zu tilgen.

„ 98 „ 12 und 13 v. o. lies $k_2 = 1 + \frac{1}{2} e^2 \sec \beta^2$; $K = 1 + e \operatorname{tg} \beta + \frac{1}{2} e^2 \operatorname{tg} \beta^2$

$$\sin \frac{\delta}{2} = -\frac{1}{2} e \operatorname{tg} \beta + \frac{1}{4} e^2 \sec \beta^2.$$

„ 102 „ 16 v. u. lies $\sin \frac{\delta}{2} = \frac{1}{4} (e^2 - \varepsilon^2)$ statt $\frac{1}{2} (e^2 - \varepsilon^2)$.

„ 111 „ 14 v. o. lies $\log_n \operatorname{tg} (45 + \frac{1}{2} \varphi)$ statt $\log_n \operatorname{tg} \frac{1}{2} p$.

„ 131 „ 4 v. o. lies $r \varepsilon$ statt $r \lambda$.

„ 143 „ 2 und 3 v. o. lies $\frac{1}{2} \log_n k$ statt $\log_n k$.

„ 162 „ 15 v. o. ist „halbe“ zu streichen.

„ 174 Nach einer mir brieflich zugegangenen Mittheilung d. Hrn. Dr. *A. Breusing*, Direktor der Seefahrtschule in Bremen, rührt diese Projektion von *Stab* her.

„ 176. Zeile 10 v. o. lies $\operatorname{tg} \omega$ statt $\operatorname{tg} \omega^2$.

„ 204 „ 14 v. u. lies $\sin (\Omega_1'' - \Omega_1')$ statt $\sin (\Omega_1'' - \Omega_1')^2$.

„ 204 „ 1 v. u. lies $k_2^2 \sin \omega^2$ statt $k_1^2 \sin \omega^2$.

„ 219 „ 8 und 6 v. u. lassen sich die ersten Theile in folgender Weise reducieren:

$$\frac{\sin \frac{p_1^2}{2} - \sin \frac{p_2^2}{2}}{\cos p_1 - \cos p_2} = \frac{1}{2} \frac{\left(1 - 2 \sin \frac{p_2^2}{2}\right) - \left(1 - 2 \sin \frac{p_1^2}{2}\right)}{\cos p_1 - \cos p_2} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\cos \frac{p_1^2}{2} - \cos \frac{p_2^2}{2}}{\cos p_1 - \cos p_2} = \frac{1}{2} \frac{\left(2 \cos \frac{p_1^2}{2} - 1\right) - \left(2 \cos \frac{p_2^2}{2} - 1\right)}{\cos p_1 - \cos p_2} = +\frac{1}{2}.$$

„ 220 Während des Druckes erfuhr ich durch briefliche Mittheilung des Herrn Dr. *A. Breusing* von einer von ihm vorgeschlagenen ausgleichenden Zenitalprojektion, bei welcher die Entfernung eines Punktes vom Kartenmittelpunkte das geometrische Mittel zwischen den Entfernungen bei der *Lambert*'schen äquivalenten (isomeren) Zenitalprojektion und der stereographischen ist, also

$$\varrho = 2 A \sqrt{\sin \frac{p}{2} \operatorname{tg} \frac{p}{2}}.$$

Für diese Projektion ist nach den Formeln pag. 83 für $m = 1$

$$k_1 = \frac{1 + \cos\frac{p^2}{2}}{2\sqrt{\cos\frac{p^3}{2}}}; \quad k_2 = \frac{1}{\sqrt{\cos\frac{p^3}{2}}}; \quad K = \frac{1 + \cos\frac{p^2}{2}}{2\cos\frac{p^3}{2}}$$

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{\sin\frac{p^2}{2}}{4 - \sin\frac{p^2}{2}}.$$

Man sieht sofort, dass diese Projektion die Vortheile der Lambert'schen Projektion nicht hat, aber in allen Fällen, wo es sich nicht um graphische Lösung verschiedener Aufgaben handelt (z. B. Bestimmung von wahren Längen und Winkeln etc.) für Weltkarten der stereographischen, orthographischen und centralen Projektion vorzuziehen ist.

Pag. 234, Zeile 12 v. u. „und welcher daher den Pol repräsentiert“ ist zu tilgen.

„ 234 „ 10 v. u. „also der Pol ist“ ist zu tilgen.

„ 239 „ 5 v. o. gehört der Factor $\frac{Me}{Em}$ zum ganzen Bruche.

„ 252 „ 6 v. o. lies $\operatorname{tg}\left(45 - \frac{v}{2}\right)^m$ statt $\operatorname{tg}\left(45 - \frac{v}{2}\right)$.

„ 257 „ 4 v. u. lies „in dem geradlinigen Parallel“ statt „in dem Schnittpunkte des geradlinigen Parallels“.

„ 278 „ 10 v. o. lies individuellen statt inviduellen.

EINLEITUNG.

1. Seit den ältesten Zeiten finden wir das Bestreben bei den civilisierten Völkern, durch möglichst genaue Messungen Aufschluss über die Gestalt und Figur der ganzen Erde sowol, als auch grösserer und kleinerer Theile derselben zu erhalten und die erlangte Kenntnis durch Anfertigung von verkleinerten Abbildungen des Erdballes klar zur Anschauung zu bringen. Diese Abbildungen können nun entweder dieselbe Form haben, wie die Erde selbst, also die sphäroidische, oder, wo auf die Abplattung der Erde wegen ihrer Kleinheit nicht Rücksicht genommen werden kann, die kugelförmige; sie heissen dann *Globen*. Oder sie können Darstellungen des Erdballes auf einer Ebene sein, *Planiglobien* oder *Landkarten*. Die Lehre von der Herstellung dieser letzteren Abbildungen heisst auch *Chorographie*. Eine Landkarte ist demnach eine bildliche Darstellung der ganzen Erdoberfläche, oder eines Theiles derselben auf einer Ebene. Wird die ganze Erdoberfläche auf einem Blatte abgebildet, so entsteht eine *Weltkarte* oder wenn das Gesammtbild kreisförmig abgeschlossen ist, ein *Planiglobium*. Werden einzelne grössere Theile, Erdtheile, ganze Länder, verzeichnet, so entsteht eine *Landkarte*. Beschränkt man sich bei der Darstellung auf kleinere Theile der Erdoberfläche, wo dann ein grösserer Massstab gewählt werden kann, so entstehen *Spezialkarten*, oder wenn sie militärischen Zwecken dienen, *Generalstabskarten*. Hiervon zu unterscheiden sind diejenigen Darstellungen, bei denen in einem noch weit grösseren Massstabe, ganz kleine Partien, einzelne Gegenden, Bezirke, Städte etc. abgebildet werden, welche vorzugsweise für die Zwecke der Verwaltung, Grundsteuerbemessung etc., oder zur genaueren Orientierung in räumlich nicht sehr ausgedehnten Gebieten dienen, sogenannte *Pläne*.

Bei der Darstellung sehr kleiner Theile der Erdoberfläche wird man nur nötig haben, die durch die Beobachtung gegebenen Elemente, seien es nun Entfernungen, Coordinaten oder gemessene Winkel direkt in die Zeichnung einzutragen, u. zw. insolange, als der dargestellte Theil ohne merklichen Fehler als eben betrachtet werden kann; dann wird die Zeichnung eine nahezu *völlig* ähnliche Abbildung des Originales sein, da die jedenfalls wegen der Krümmung der Erdoberfläche

vorhandenen Fehler der Voraussetzung nach so gering sind, dass sie nicht in Betracht kommen. Mit der Darstellung dieser Kartenblätter: Messtischaufnahmen werden wir uns hier nicht beschäftigen.

Anders verhält es sich, wenn das aufzunehmende Gebiet so gross ist, dass auf die Krümmung desselben Rücksicht genommen werden muss; denn da die Erde ein abgeplattetes Sphäroid ist, welches sich bekanntlich nicht ohne Risse, Dehnungen oder Pressungen in eine Ebene ausbreiten lässt, so kann man in der Ebene nie ein dem Originale völlig ähnliches Bild herstellen. Um zu sehen, wie weit man in der Naturtreue bei der Abbildung kommen kann, müssen wir zunächst diejenigen Bedingungen, welche man an eine gute Karte zu stellen hat, und welche dieselbe erfüllen soll, näher präcisieren.

Die Figuren der Länder sollen nicht verunstaltet, die Grössen derselben im richtigen Verhältnisse wiedergegeben werden; die Entfernungen der Örter auf der Karte sollen sich verhalten wie die entsprechenden auf der Kugel. Winkel, welche zwei verschiedene Richtungen auf dem Originale einschliessen, sollen unverändert in der Karte erscheinen, wozu auch gehört, dass Punkte, welche in derselben Richtung auf der Erde liegen (auf der Kugel liegen sie dann in einem grössten Kreise) auch auf der Karte in derselben Richtung (in einer Geraden) liegen. Endlich soll man die geographische Lage jedes Punktes (seine geographische Länge und Breite) leicht und sicher aus der Karte ablesen können. Lassen wir vorerst die letzte Forderung weg, so haben wir es mit einer ganzen Reihe von Bedingungen zu thun, von denen allerdings einige schon in den anderen implicite enthalten sind, welche aber in ihrer Gesammtheit auf einem *ebenen* Bilde *nicht* erfüllt werden können.[1])

Denken wir uns z. B. ein sphärisches Dreieck auf der Kugel, und zeichnen wir in der Ebene ein solches, dessen Seiten gleich

1) Die Untersuchung, welche Bedingungen zugleich erfüllbar sind und auf welche von denselben man das meiste Gewicht zu legen hat, kann natürlich nur mit mathematischen Hilfsmitteln durchgeführt werden und ist auch das Zeichnen der Karten vorzugsweise Sache des Geodäten; jedenfalls muss billigerweise gefordert werden, dass diejenigen, welche die Karten für ihre Zwecke verwenden oder zeichnen, sich mit den Principien der Landkartentheorie gehörig vertraut machen. J. T. *Mayer* sagt in seiner „Vollständigen und gründlichen Anweisung zur Verzeichnung der Land-, See- und Himmelskarten (Ausgabe 1804, p. 36): „Eine vorgegebene Karte blos nachzeichnen, sie allenfalls verjüngen, oder, was noch schlimmer ist, gar zu vergrössern, oder aus mehreren eine andere zusammenflicken, heisst noch nicht eine neue verfertigen“ und pag. 43: „Unvollkommenheiten der Karten rühren meist daher, dass so viele sich mit der Verfertigung derselben abgeben, welche theils ihrer Phantasie zu sehr freien Lauf lassen, theils ohne hinlänglichen Vorrat historischer und geographischer Hilfsmittel zu dieser Arbeit schreiten, *theils auch sehr häufig gar nicht einmal die Kenntnis der Geometrie inne haben, welche zu einer solchen Arbeit erforderlich ist.*“

sind den Seiten des Originales, so sind die sämmtlichen Winkel des Bildes verschieden von denen des Originales; stimmen zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel überein, so werden die beiden anderen Winkel und die dritte Seite geändert. Kurz, man kann immer nur einige dieser Bedingungen erfüllen, und nach dem Zwecke, welchen die Karten erfüllen sollen, wird man sich für die eine oder die andere entscheiden.

Im allgemeinen nennt man jede Darstellung der Oberfläche der Erde, welches auch das Gesetz derselben sei, eine *Projektion*, oder einen *Entwurf*, abweichend vom Sprachgebrauche der deskriptiven Geometrie, wo man unter Projektion ein nach Central- oder Parallelperspektive erhaltenes ebenes Bild eines körperlichen Objektes versteht. Solche spezielle Darstellungen nennt man in der Chorographie *perspektivische* Projektionen.

Projektionen, denen die Haupteigenschaft zukömmt, dass bei ihnen die Winkel unter denen sich die Bilder zweier beliebiger Linien schneiden, gleich sind denjenigen, welche die Originale einschliessen, nennt man *conforme* Abbildungen oder nach *Tissot*[1]) *„projections autogonales“*. Projektionen, bei welchen zwei beliebig grosse oder kleine Flächen der Karte dasselbe Verhältnis, wie ihre Originale haben, heissen *äquivalent*, nach *Tissot „projections authaliques“*. Das Wesen der letzteren wird am klarsten, wenn man sich von der Erdoberfläche ein verkleinertes völlig ähnliches Bild (einen Globus), dessen Gesammtoberfläche gleich ist der Fläche des Bildes der ganzen Erde auf der Karte, construiert; dann muss nämlich *jedes beliebige Flächenstück* der Karte flächengleich sein dem entsprechenden Stück des Globus.

Was den letzten Punkt, die rasche und sichere Entnahme der geographischen Coordinaten (Länge und Breite) aus der Karte anbelangt, so ist hierzu nötig, dass man auf dieser die Parallelkreise und Meridiane verzeichnet. Um dieses leicht thun zu können, ist erforderlich, dass dieselben leicht zu zeichnende Linien, also Gerade oder Kreise seien, und es ist als ein wesentlicher Vortheil der Karte anzusehen, wenn die Netzlinien diese Eigenschaften haben. Denn es wäre sehr mühsam, die einzelnen Punkte der Karte durch ihre Entfernungen von anderen bereits eingezeichneten Punkten, oder durch ihre auf ein rechtwinkliges Axensystem bezogenen Coordinaten zu bestimmen. Man stellt sich immer vorerst ein Gradnetz her, indem man die Systeme der Meridiane und Parallelkreise zieht und legt dieses Gradnetz der Einzeichnung der Punkte, die man durch ihre Länge und Breite bestimmt, zu Grunde.

---

1) Mémoire sur la représentation des surfaces et sur les cartes géographiques.

2. Man kann die sämmtlichen Karten-Projektionen in folgende 4 Gruppen theilen:

1) *Perspektivische Projektionen.* Bei diesen denkt man sich die ganze Erdoberfläche oder ein verkleinertes völlig ähnliches Abbild derselben (einen Globus) durch, von einem Punkte, dem *Augpunkte* (der auch in unendlicher Entfernung liegen kann) ausgehende Strahlen perspektivisch auf eine Ebene, die *Projektions-* oder *Bildebene*, projiciert. Diese Kartenentwürfe finden nur wenig Verwendung, wenngleich ein wesentlicher nicht zu unterschätzender Vortheil derselben darin besteht, dass, da sie nach geometrischen Regeln leicht auf graphische Weise herzustellen sind, auch die Lösung verschiedener wichtiger Aufgaben (Bestimmung der Entfernung zweier Punkte, des Winkels zweier Richtungen etc.) ebenfalls auf rein graphischem Wege leicht durchgeführt werden kann.

2) *Kegelprojektionen.* Man denkt sich der Erdoberfläche einen, dieselbe längs eines Parallelkreises berührenden Kegel umschrieben, die Punkte der Erde entweder perspektivisch, oder nach irgend einem anderen Gesetze auf den Kegel projiciert, diesen längs einer Erzeugenden aufgeschnitten und in eine Ebene ausgebreitet. Berührt der Kegel längs eines grössten Kreises (gewöhnlich im Äquator), so entsteht eine *Cylinderprojektion.* Diese Darstellungen haben den Vortheil, dass die Verhältnisse für alle Punkte eines Paralleles dieselben bleiben, man also ohne Verzerrungen befürchten zu müssen, die Karte beliebig weit nach Ost und West fortsetzen kann. Man kann zu denselben auch noch die *polykonischen Projektionen* rechnen, bei denen man, um auch in der Richtung der Meridiane nicht allzugrosse Verzerrungen hervorzurufen, eine grössere Zone in eine Reihe kleinerer zerlegt, und jede auf einen umschriebenen Kegel projiciert, so wie auch die preussische *Polyederprojektion* (österreichische *Gradkartenblätter*).

3) Abbildungen, bei denen die Flächeninhalte der Bilder beliebig grosser Stücke der Erdoberfläche dasselbe Verhältnis behalten, wie die Originalien. Diese Projektionen nennt man *aequivalente*; sie sind besonders wichtig, wenn es sich darum handelt, mittels des Planimeters die Grösse der mit einer gewissen Eigenschaft behafteten Flächengebiete, deren Begrenzungen durch die geographischen Coordinaten einzelner Punkte bestimmt sind, zu ermitteln, z. B. für die Bestimmung der Verbreitungsbezirke von Thieren und Pflanzen, etc.

4) *Conforme Projektionen*, bei denen die Winkel, welche zwei Linien auf der Erdoberfläche einschliessen, auch im Bilde erhalten bleiben.

Die Entscheidung, welche von diesen Projektionen vorzuziehen ist, hängt von vielen Umständen ab. Für die Schiffahrt hat man eigene Karten, bei denen die Haupteigenschaft gefordert wird, dass die Curs-

linie des Schiffes sich als Gerade darstellt; für Himmelskarten ist es für viele Zwecke bequem, wenn sich die grössten Kreise als Gerade darstellen. Will man einen Überblick über die Flächenverhältnisse verschiedener Länder erhalten (z. B. bei Karten, welche die Fauna oder Flora der Länder darstellen soll, in manchen Fällen bei meteorologischen und geologischen Karten) so wird man aequivalente Abbildungen wählen; sind solche Rücksichten nicht massgebend, so lassen sich keine festen Regeln angeben, und sind hierüber auch die Meinungen getheilt; *Tissot* (l. c. pag. 41) spricht sich dahin aus, dass man vor allem darauf zu sehen hat, dass die Winkel in der Karte nicht verändert werden oder dass die Veränderung doch wenigstens eine *möglichst* geringe ist. Dann werden die Entfernungen notwendig verändert und man hat als zweite Forderung zu stellen, dass die Veränderlichkeit der Entfernungen, also die Veränderlichkeit des Massstabes *möglichst gering* sei, und endlich soll man darauf sehen, dass die Netzlinien möglichst einfach zu zeichnen seien, oder, wenn dieses schon nicht geht, dass die Formeln für die Coordinaten der Punkte möglichst einfach werden, so dass das Einzeichnen der Punkte möglichst leicht werde. Darauf hat nun *Tissot* seine „*Compensative Projektion*“ (l. c. pag. 45ff) gegründet, welche in diesem Buche im Anschlusse an die allgemeine Theorie im 4. Kapitel gegeben wird.

I. KAPITEL.

PERSPEKTIVISCHE PROJEKTIONEN.

3. Die perspektivischen Projektionen entstehen, wenn man aus einem willkürlich angenommenen Punkte Strahlen nach den einzelnen Punkten des darzustellenden Objektes, also hier der Erdoberfläche zieht, und diese Projektionsstrahlen mit irgend einer, ebenfalls willkürlich angenommenen Ebene zum Schnitt bringt. Kennt man die relative Lage dieser Ebene (der *Projektionsebene*) und des angenommenen *Projektionscentrums* gegenüber der abzubildenden Fläche, so kann man construktiv oder analytisch das Bild der Fläche erhalten, und auch umgekehrt aus dem Bilde das Original reconstruieren.

Um aber ein Bild der Erdoberfläche zu erhalten, denkt man sich zunächst ein verkleinertes völlig ähnliches Bild derselben, und dieses wird dann perspektivisch auf eine Ebene projiciert. Die Grösse der Karte hängt nun offenbar zunächst von der Grösse des zur Darstellung gewählten verkleinerten Abbildes der Erdoberfläche ab, ferner aber auch von der Entfernung der Projektionsebene vom Projektionscentrum; eine parallele Verschiebung der ersteren ändert die Form der Karte nicht, wol aber den Massstab derselben; hingegen wird eine Verschiebung des Projektionscentrums notwendig die Form der Karte ändern, und die wesentlichen Verschiedenheiten der im folgenden zu behandelnden Projektionsmethoden sind durch die verschiedene Lage des Projektionscentrums bedingt. Man kann sich dies am leichtesten versinnlichen, wenn man sich in dem Projektionscentrum ein Auge denkt; diesem erscheint dann die Erdoberfläche genau so wie ihr perspektivisches Bild, und man kann daher auch das Projektionscentrum als Augpunkt bezeichnen.

Denken wir uns für die perspektivischen Projektionen die Erde als Kugel und verbinden wir ihren Mittelpunkt C mit dem Projektionscentrum O; diese Verbindungslinie schneidet die Kugeloberfläche in zwei Punkten. Kennt man die Lage eines dieser Punkte, und die Entfernung des Projektionscentrums vom Mittelpunkte, so ist damit die Lage des Projektionscentrums bestimmt. Denkt man sich von diesem auf die Bildebene ein Perpendikel gefällt, und die Lage dieses

Perpendikels gegenüber der Verbindungslinie OC bestimmt[1]), so ist damit auch schon die Lage der Bildebene selbst bekannt, bis auf den Abstand derselben vom Projektionscentrum, der aber, wie schon erwähnt, ohne Belang ist.

In der Praxis nimmt man immer an, dass die Verbindungslinie des Kugelmittelpunktes und des Projektionscentrums mit dem von dem letzteren auf die Projektions- oder Bildebene gefällten Perpendikel zusammenfällt. Man nimmt dabei das Projektionscentrum stets so an, dass diese Verbindungslinie der Projektionsstrahl des Mittelpunktes des darzustellenden Theiles der Kugel ist; mit anderen Worten ausgedrückt: ist A ein ungefähr in der Mitte des darzustellenden Flächentheiles liegender Punkt, den wir den *Hauptpunkt* oder *Mittelpunkt* des Flächentheiles nennen, so wird der Augpunkt in dem (eventuell verlängerten) Halbmesser dieses Punktes angenommen, und die Bildebene senkrecht zu diesem Halbmesser; das Bild a des Punktes A wird dann der *Haupt-* oder *Mittelpunkt* der Karte.

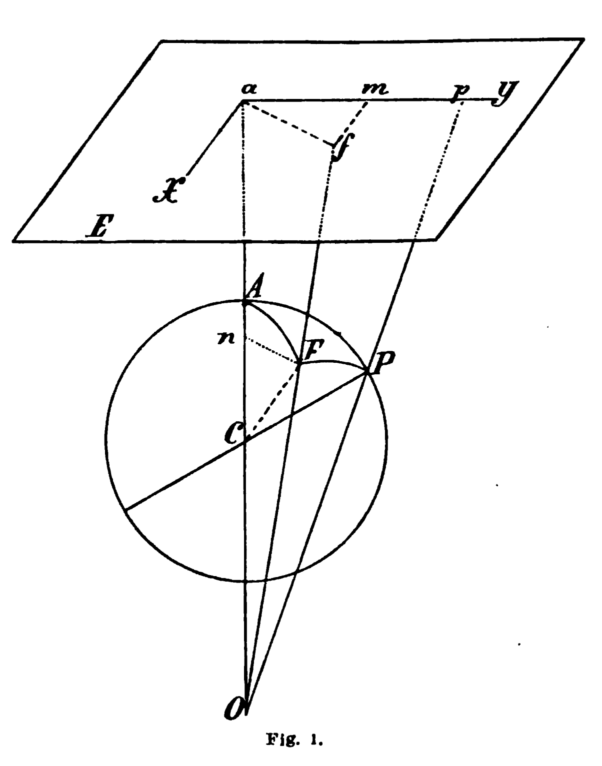


Fig. 1.

Sei (Fig. 1) A der Mittelpunkt des darzustellenden Flächentheiles, P der Nordpol (also die Ebene des Zeichenpapiers mit dem Meridian von A zusammenfallend gedacht), in der Verlängerung von AC das Projektionscentrum O und sei E die Bildebene, in irgend einem Punkte a des Projektionsstrahles OA auf diesem senkrecht, so dass a der Mittelpunkt der Karte wird. Sei β die geographische Breite von A und zählt man die Längen von dem Meridian AP aus, so handelt es sich darum, aus der geographischen Breite φ, und der Längendifferenz

1) Schneidet dieses Perpendikel die Kugel, so wird seine Lage durch die sphärischen Coordinaten eines der Durchschnittspunkte bestimmt werden können.

λ eines Punktes F der Erdkugel seinen Ort auf der Karte zu bestimmen. Zu diesem Zwecke beziehen wir die Projektion f dieses Punktes auf ein rechtwinkliges Axensystem, dessen Y-axe durch das Bild p des Nordpoles P geht; die positive Y-axe sei, wo nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist, vom Mittelpunkte der Karte gegen das Bild des Poles zu; da die Y-axe als Schnitt der Meridianebene von A mit der Projektionsebene entsteht, woraus unmittelbar folgt, dass das Bild des ersten Meridians (des Meridians des Mittelpunktes der Karte) eine Gerade ist, so werden Punkte mit westlicher Länge auf der einen, Punkte mit östlicher Länge auf der anderen Seite liegen, und es soll nun festgesetzt werden, dass für Punkte mit *östlicher* Länge das x positiv sei, wodurch der Sinn der Zählung unzweideutig festgelegt ist.[1]) Man hat nun

$$AP = 90 - \beta$$
$$FP = 90 - \varphi$$
$$\measuredangle\, APF = \lambda$$
$$fm = x; \quad am = y.$$

Wir setzen nun

$$Oa = D; \quad OC = a; \quad CF = r; \quad af = \varrho$$

und

$$AF = \measuredangle\, ACF = v; \quad \measuredangle\, PAF = u.$$

Nun ist der Winkel paf der Neigungswinkel der Ebenen maO und faO, also gleich dem Winkel PAF, daher auch $\measuredangle\, maf = u$; man hat daher

$$fm = x = \varrho \sin u$$
$$am = y = \varrho \cos u.$$

Aus dem Dreiecke Oaf folgt

$$\varrho = D \operatorname{tg} aOf$$

Fällt man von F ein Perpendikel Fn auf den Projektionsstrahl OA, so ist

$$\operatorname{tg} aOf = \frac{Fn}{OC + Cn} = \frac{r \sin v}{a + r \cos v}$$

demnach

$$\varrho = \frac{Dr \sin v}{a + r \cos v}$$

folglich

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{Dr \sin v \sin u}{a + r \cos v} \\ y &= \frac{Dr \sin v \cos u}{a + r \cos v} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

---

1) Dabei ist zu bemerken, dass bei Polarprojektionen, da hier A mit P zusammenfällt, die Längen λ von der negativen Y-axe gegen die positive X-axe zu gezählt werden.

Aus dem sphärischen Dreiecke AFP findet man durch Anwendung der drei Grundformeln des sphärischen Dreieckes:

$$\cos v = \sin \beta \sin \varphi + \cos \beta \cos \varphi \cos \lambda$$
$$\sin v \sin u = \sin \lambda \cos \varphi$$
$$\sin v \cos u = \cos \beta \sin \varphi - \sin \beta \cos \varphi \cos \lambda.$$

Setzt man diese Werte von $\cos v$, $\sin v \sin u$ und $\sin v \cos u$ in die Formeln (1) ein, so findet man sofort

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{D r \sin \lambda \cos \varphi}{a + r(\sin \beta \sin \varphi + \cos \beta \cos \varphi \cos \lambda)} \\ y &= \frac{D r (\cos \beta \sin \varphi - \sin \beta \cos \varphi \cos \lambda)}{a + r(\sin \beta \sin \varphi + \cos \beta \cos \varphi \cos \lambda)} \end{aligned}\right\} . \qquad \text{(I)}$$

Durch diese Gleichungen sind nun die rechtwinkligen Coordinaten x, y eines Punktes f der Karte ausgedrückt durch die geographische Breite φ des Punktes F der Erde, den Längenunterschied λ von dem Mittelpunkte der Karte und durch die die Grösse der darzustellenden Fläche, die Lage des Kartenmittelpunktes, des Auges und der Projektionsebene fixierenden Constanten r, β, D, a. Man könnte demnach schon nach diesen Formeln das Bild irgend eines Punktes construieren; dieser Vorgang wäre aber für das Zeichnen der Karten äusserst unpraktisch, und man zieht es vor, sich zunächst ein Kartennetz herzustellen, in welches man dann die einzelnen Punkte einträgt. Wenn man einmal in den Gleichungen (I) die Grösse φ constant behält, und nur λ variiren lässt, so erhält man das Bild der Gesammtheit der Punkte, welche dieselbe geographische Breite haben, also das Bild eines Parallelkreises. Statt aber denselben in der Weise zu zeichnen, dass man für ein und dasselbe φ und für verschiedene Werte von λ die Coordinaten x und y einiger seiner Punkte rechnet, kann man auch die Gleichung dieser Linie aufstellen. Unter der Voraussetzung eines constanten φ stellen die beiden Gleichungen (I) bereits diese Linie vor, indem die Coordinaten x und y durch einen veränderlichen Parameter λ ausgedrückt sind. Nimmt man für x einen gewissen Wert an, so giebt die erste der beiden Gleichungen (I) den zugehörigen Wert von λ, und setzt man diesen in die zweite ein, so erhält man den zugehörigen Wert von y; statt dessen kann man aber auch allgemein in analytischer Form den Wert von λ aus der ersten Gleichung durch x ausdrücken, und in die zweite einsetzen, was aber darauf hinauskommt, den Wert von λ aus den beiden Gleichungen zu eliminieren, wobei man irgend einen beliebigen Weg einschlagen kann. Die Eliminationsgleichung giebt dann das System der Parallelkreise. Ebenso wird man ein anderes Liniensystem erhalten, wenn man dem λ verschiedene, aber constante Werte beilegt; für einen gewissen, constanten Wert von λ erhält man die Gesammtheit der Bilder der Punkte, welche unter verschiedenen Breiten liegen, aber dieselbe Längendifferenz gegen A haben, d. h. Punkte, welche

unter demselben Meridian liegen. Man könnte auch wieder, um einen Meridian zu zeichnen, bei fortwährend constantem λ zu einem angenommenen Werte von x aus der ersten Gleichung das zugehörige φ suchen, diesen Wert in die zweite Gleichung substituieren, und dadurch den zugehörigen Wert von y erhalten; um diese Substitution nicht jedesmal neuerdings vornehmen zu müssen, kann man aber den aus der ersten Gleichung folgenden Wert von φ, welcher natürlich eine Funktion von x und λ sein wird, in die zweite einsetzen, und erhält dann y als Funktion von x und λ; der eingeschlagene Weg kömmt aber darauf hinaus, aus den beiden Gleichungen φ zu eliminieren. Wir kommen also zu dem Resultate, dass wir die Gleichung der Parallelkreise erhalten, indem wir λ aus den Gleichungen (I) eliminieren, und die Gleichungen der Meridiane, indem wir φ aus denselben eliminieren. Die Gleichung der Parallelkreise wird dann blos x, y, φ enthalten, und jedem speziellen Werte von φ entspricht der zu dieser Breite gehörige Parallelkreis; die Gleichung der Meridiane enthält x, y, λ und zu jedem Werte von λ gehört ein Meridian. Durch Spezialisierung der Werte von λ und φ in den beiden erhaltenen Gleichungen wird man demnach das System der Meridiane und Parallelkreise also das *Kartennetz* erhalten, und es wird sich auch in der Folge immer darum handeln, Methoden für die analytische oder construktive Bestimmung derselben zu geben.

4. Sowol die Entfernung zweier Punkte als auch der Winkel zweier Linien auf der Karte werden nicht gleich sein der Entfernung der Punkte, resp. dem Winkel der Linien auf der Kugel, deren Bilder sie sind. Seien (Fig. 2) P, P' zwei Punkte der Erdkugel, p, p' ihre Bilder, so wird das Verhältnis $\frac{pp'}{PP'}$ ein Mass für die Vergrösserung, eventuell Verkleinerung, der Linie PP' geben; lässt man nun PP' unendlich klein werden, so wird der Grenzwert des Verhältnisses $\frac{pp'}{PP'}$ für einen unendlich klein werdenden Wert von PP' ein Mass für die Vergrösserung — oder Verkleinerung — an der betrachteten Stelle und in der betrachteten Richtung sein; denn es wird im allgemeinen diese Vergrösserung, d. h. der Massstab der Karte in verschiedenen Punkten und auch an demselben Punkte in verschiedenen Richtungen verschieden sein können, und auch wirklich verschieden sein. Ist ferner der Winkel, welchen die Linie PP' (der berührende grösste Kreis) mit dem grössten Kreise PA macht, ω, und der Winkel, welchen das Bild pp' oder die in p an die Bildcurve gezogene Tangente mit dem Bilde pa macht, welches notwendig eine Gerade sein muss, da es der Schnitt der Ebene OPA mit der Projektionsebene ist, ω', so wird auch ω' im allgemeinen nicht gleich ω sein, und die Ausdrücke für $\frac{pp'}{PP'}$ und $\omega' - \omega$ oder $\frac{\operatorname{tg} \omega'}{\operatorname{tg} \omega}$ werden ein Mass für die Verzerrung der Karte

in dem betrachteten Punkte p geben; die Karte würde dem Originale völlig ähnlich sein, wenn $\frac{pp'}{PP'} = 1$; $\frac{\operatorname{tg}\omega'}{\operatorname{tg}\omega} = 1$ oder $\omega' - \omega = 0$ wäre; das Ideal einer guten Karte wäre erreicht, wenn diese Bedingungen *in jedem Punkte* der Karte erfüllt würden; allein, wie später näher erörtert werden wird, ist dieses, da eine Kugel auf eine Ebene nicht abwickelbar ist, überhaupt nicht erreichbar, und man muss sich begnügen, diesen idealen Verhältnissen mehr oder weniger, — so weit als möglich — sich zu nähern. Aus diesem Bestreben, verbunden mit dem Wunsche möglichst einfache Methoden zur Zeichnung der Netze zu haben, gingen die verschiedenen Versuche und Projektionsmethoden hervor.

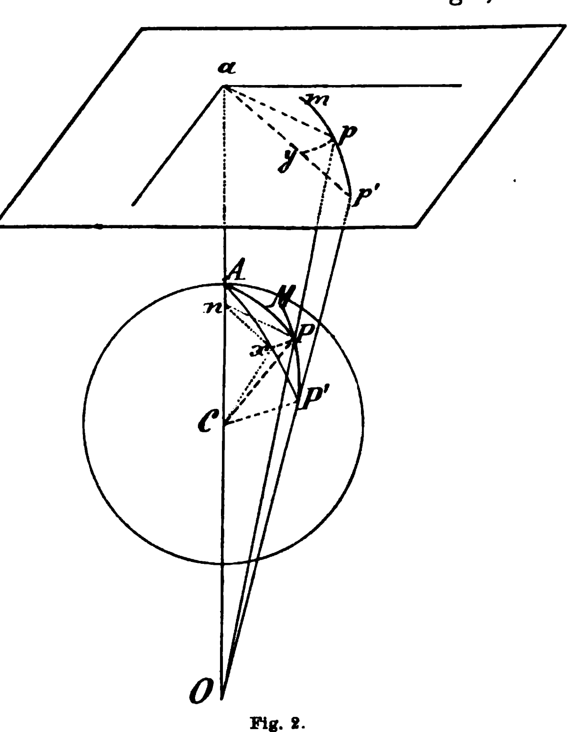


Fig. 2.

Mögen in Fig. 2 $O, C, A, a, D, r, \varrho, v, u$ dieselbe Bedeutung haben wie in Fig. 1; seien P, P' zwei unendlich benachbarte Punkte der Kugel, in der Entfernung ds; ihre Bilder seien p, p' und deren Entfernung $pp' = dS$; sei ferner der Winkel MPA, den der durch PP' gehende grösste Kreis (der an eine durch P gehende Curve berührend gedacht ist) mit AP einschliesst, ω; dessen Bild $mpa = \omega'$. Zeichnet man auf der Kugel aus dem Mittelpunkte A mit dem Halbmesser AP den kleinen Kreisbogen Px, so entsteht ein bei x rechtwinkeliges, als eben zu betrachtendes Dreieck $PP'x$, und da

$$\sphericalangle\, Pnx = du$$
$$\sphericalangle\, P'Cx = dv$$

so ist

$$Px = r \sin v\, du$$
$$P'x = r\, dv$$

demnach

$$ds^2 = r^2 \sin v^2\, du^2 + r^2\, dv^2.$$

Um auch dS direkt durch v und u auszudrücken, gehen wir von den Gleichungen (1) aus; diese geben durch Differentiation

$$dx = Dr\left[\frac{\cos v \sin u}{a + r\cos v} + \frac{r \sin v^2 \sin u}{(a + r\cos v)^2}\right] dv + \frac{Dr \sin v \cos u}{a + r \cos v}\, du$$

$$dy = Dr\left[\frac{\cos v \cos u}{a + r\cos v} + \frac{r \sin v^2 \cos u}{(a + r\cos v)^2}\right] dv - \frac{Dr \sin v \sin u}{a + r \cos v}\, du$$

oder

$$dx = Dr\,\frac{(r + a\cos v)\sin u}{(a + r\cos v)^2}\, dv + Dr\,\frac{\sin v \cos u}{a + r\cos v}\, du$$

$$dy = Dr\,\frac{(r + a\cos v)\cos u}{(a + r\cos v)^2}\, dv - Dr\,\frac{\sin v \sin u}{a + r\cos v}\, du$$

daher

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 = D^2 r^2\,\frac{(r + a\cos v)^2}{(a + r\cos v)^4}\, dv^2 + D^2 r^2\,\frac{\sin v^2}{(a + r\cos v)^2}\, du^2.$$

Mit diesen Werten von ds und dS erhält man nun:

$$\left(\frac{dS}{ds}\right)^2 = \frac{D^2}{(a + r\cos v)^2}\cdot\frac{\left(\frac{r + a\cos v}{a + r\cos v}\right)^2 dv^2 + \sin v^2\, du^2}{dv^2 + \sin v^2\, du^2}$$

oder

$$\left(\frac{dS}{ds}\right)^2 = \frac{D^2}{(a + r\cos v)^2}\cdot\frac{\left(\frac{r + a\cos v}{a + r\cos v}\right)^2 + \left(\sin v\,\frac{du}{dv}\right)^2}{1 + \left(\sin v\,\frac{du}{dv}\right)^2}.$$

Aus dem Dreiecke $PP'x$ findet man weiter für den Winkel $PP'x$, welcher bis auf unendlich kleine Grössen gleich ist $MPA = \omega$:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{Px}{P'x} = \sin v\,\frac{du}{dv}.$$

Setzt man diesen Wert oben ein, und nennt das Vergrösserungsverhältnis

$$\frac{dS}{ds} = k,$$

so erhält man

$$k^2 = \frac{D^2}{(a + r\cos v^2)}\cdot\frac{\left(\frac{r + a\cos v}{a + r\cos v}\right)^2 + \operatorname{tg}\omega^2}{1 + \operatorname{tg}\omega^2}$$

oder

$$k^2 = \frac{D^2}{(a + r\cos v)^2}\left[\left(\frac{r + a\cos v}{a + r\cos v}\right)^2 \cos\omega^2 + \sin\omega^2\right]. \qquad \text{(II)}$$

Das Vergrösserungsverhältnis ist demnach als Funktion der Entfernung vom Kartenmittelpunkte und vom Azimute dargestellt; setzt man hier $\omega = 0$, so erhält man die Vergrösserung im Punkte P in der Richtung vom Kartenmittelpunkte gegen P hin, also in radialer Richtung. Diese Vergrösserung wird

$$k_1 = D\,\frac{r + a\cos v}{(a + r\cos v)^2};$$

setzt man $\omega = 90^0$, so erhält man die Vergrösserung in der darauf senkrechten Richtung; sie wird

$$k_2 = \frac{D}{a + r \cos v};$$

demnach ganz allgemein

$$k = k_1 \cos \omega^2 + k_2 \sin \omega^2.$$

Dabei sind D und a in denselben Einheiten auszudrücken, wie r; ist

$$\frac{D}{r} = \delta, \quad \frac{a}{r} = x,$$

so wird

$$k^2 = \frac{\delta^2}{(x + \cos v)^2} \left[\left(\frac{1 + x \cos v}{x + \cos v} \right)^2 \cos \omega^2 + \sin \omega^2 \right]$$

Dabei ist jedoch nicht zu vergessen, dass das Bild nicht von der Erdkugel selbst abgenommen wird, sondern von einer verkleinerten Copie. Ist r ihr Radius, R derjenige der Erdkugel, so ist letztere im Verhältnisse $\frac{r}{R}$ verkleinert, daher der Massstab der Karte in einem gegebenen Punkte und in einer gegebenen Richtung $\frac{r}{R} k$. (Für das Ellipsoid hätten r, R, die Bedeutung der einander entsprechenden Halbaxen).

Denkt man sich im Punkte P ein unendlich kleines Rechteck, dessen eine Seite mit der Richtung von P nach dem Mittelpunkte der darzustellenden Fläche zusammenfällt, und zeichnet das entsprechende Rechteck auf der Karte, so wird dieses auch vergrössert erscheinen (wobei natürlich eine Verkleinerung dadurch zum Ausdrucke kommt, dass der Vergrösserungsfaktor ein echter Bruch ist); seien die beiden Seiten des Rechteckes auf der Kugel ds_1, ds_2, so sind sie auf der Karte $k_1 ds_1$, $k_2 ds_2$; die entsprechenden Flächen sind daher $ds_1 ds_2$ und $k_1 k_2 ds_1 ds_2$; folglich die Vergrösserung des Rechtecks, oder kürzer die *Flächenvergrösserung* [1])

---

1) Es ist dabei zu bemerken, dass nur scheinbar eine Willkürlichkeit darin gelegen ist, gerade dieses Rechteck zur Bestimmung der Flächenvergrösserung zu verwenden. Wählt man statt dessen ein Rechteck, dessen Seiten die Azimute ω und $90 + \omega$ haben, so sind die zugehörigen Linearvergrösserungen, wenn man Kürze halber

$$\frac{r + a \cos v}{a + r \cos v} = m \text{ setzt:}$$

$$k_\omega = \frac{D}{a + r \cos v} \sqrt{m^2 \cos \omega^2 + \sin \omega^2}$$

$$k_{90 + \omega} = \frac{D}{a + r \cos v} \sqrt{m^2 \sin \omega^2 + \cos \omega^2},$$

demnach

$$k_\omega k_{90 + \omega} = \frac{D^2}{(a + r \cos v)^2} \sqrt{(m^4 + 1) \sin \omega^2 \cos \omega^2 + m^2 (\cos \omega^4 + \sin \omega^4)}$$

$$K = \frac{k_1 k_2 ds_1 ds_2}{ds_1 ds_2} = k_1 k_2,$$

also für unseren Fall

$$K = D^2 \frac{r + a\cos v}{(a + r\cos v)^3}.$$

Zieht man ferner in Fig. 2 den Kreisbogen py, mit dem Mittelpunkte in a, so wird

$$py = pp' \sin pp'y$$

oder

$$\varrho\, du = dS \sin \omega'$$

und daher

$$\sin\omega' = \varrho \frac{du}{dS} = \frac{\sin v\, du}{\sqrt{\left(\frac{r + a\cos v}{a + r\cos v}\right)^2 dv^2 + \sin v^2 du^2}} = \frac{\operatorname{tg}\omega}{\sqrt{m^2 + \operatorname{tg}\omega^2}},$$

wenn Kürze halber

$$\frac{r + a\cos v}{a + r\cos v} = m$$

gesetzt wird; daraus folgt nun

$$\operatorname{tg}\omega' = \frac{\sin\omega'}{\cos\omega'} = \frac{\operatorname{tg}\omega}{m}$$

oder

$$\operatorname{tg}\omega' = \frac{a + r\cos v}{r + a\cos v} \operatorname{tg}\omega. \tag{III}$$

Das Maximum der Änderung der Richtung tritt ein, wenn $\omega' - \omega$

---

oder

$$k_\omega k_{90+\omega} = \frac{D^2}{2(a + r\cos v)^2} \sqrt{(m^2 - 1)^2 \sin 2\omega^2 + 4m^2}.$$

Wenn nun in der Karte die Bilder der in den Azimuten ω und $90 + \omega$ gezogenen Richtungen auch aufeinander senkrecht stehen würden, so würde $k_\omega k_{90+\omega}$ der Wert der Flächenvergrösserung sein, also abhängig von ω; allein wir werden später (s. § 43) sehen, dass diese Bilder nicht aufeinander senkrecht stehen, und in der That die Flächenvergrösserung von der Wahl der Figur unabhängig ist. Ist nun der Winkel der Bilder der beiden Richtungen ω und $90 + \omega$ gleich $90 \pm \delta'$, so wird $K = k_\omega k_{90+\omega} \cos\delta'$, demnach

$$\cos\delta' = \frac{k_1 k_2}{k_\omega k_{90+\omega}} = \frac{2m}{\sqrt{(m^2 - 1)^2 \sin 2\omega^2 + 4m^2}}$$

Diese Winkeländerung δ' wird am grössten, wenn $\cos\delta'$ am kleinsten, also der Nenner ein Maximum, was für $\omega = 45^0$ stattfindet; dann wird, wenn dieser Maximalwert mit δ_1 bezeichnet wird:

$$\cos\delta_1 = \frac{2m}{m^2 + 1} \quad \text{oder} \quad \frac{1 - \cos\delta_1}{1 + \cos\delta_1} = \left(\frac{1 - m}{1 + m}\right)^2 \quad \text{also} \quad \operatorname{tg}\frac{\delta_1}{2} = \frac{1 - m}{1 + m}.$$

δ_1 giebt die Maximaländerung eines *rechten* Winkels, während der oben bestimmte Wert von δ die überhaupt mögliche Maximaländerung eines Winkels giebt (s. auch § 43).

ein Maximum wird, also $\frac{d\omega'}{d\omega} - 1 = 0$; es folgt aber aus Gleichung (III):

$$\frac{d\omega'}{d\omega} = \frac{1}{m}\frac{\cos\omega'^2}{\cos\omega^2} = \frac{1}{m}\cdot\frac{1+\operatorname{tg}\omega^2}{1+\frac{1}{m^2}\operatorname{tg}\omega^2}.$$

Die Bedingung für das Maximum wird daher

$$\frac{1+\operatorname{tg}\omega^2}{m+\frac{1}{m}\operatorname{tg}\omega^2} - 1 = 0,$$

woraus folgt

$$\operatorname{tg}\omega = \sqrt{m},\quad \operatorname{tg}\omega' = \frac{1}{\sqrt{m}},$$

folglich

$$\operatorname{tg}(\omega'-\omega) = \frac{1-m}{2\sqrt{m}},\quad \sin(\omega'-\omega) = \frac{1-m}{1+m}$$

oder wenn der Wert von m restituiert wird:

$$\sin(\omega'-\omega) = \frac{a-r}{a+r}\,\frac{1-\cos v}{1+\cos v} = \frac{a-r}{a+r}\operatorname{tg}\frac{v^2}{2}.$$

Hieraus folgt noch

$$\operatorname{tg}\omega^2 = \frac{1-\cos 2\omega}{1+\cos 2\omega} = m$$

$$\cos 2\omega = \frac{1-m}{1+m}.$$

Die Änderung eines Winkels ist nun gleich der Differenz der Richtungsänderungen, wenn beide Richtungen auf derselben Seite von PA, und gleich der Summe, wenn sie zu verschiedenen Seiten von PA liegen. Die Maximaländerung des Winkels wird demnach gleich der doppelten Maximaländerung der Richtung, also gleich $2(\omega'-\omega)$ sein; nennt man dieselbe δ, so wird also

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{a-r}{a+r}\operatorname{tg}\frac{v^2}{2}. \tag{III'}$$

Die Gleichungen (I), (II), (III) oder (III') sind die Grundgleichungen für alle perspektivischen Projektionen.

5. Man unterscheidet 4 Hauptformen von perspektivischen Projektionen u. zw.:

1) Das Projektionscentrum befindet sich in unendlicher Entfernung: die *orthographische* Projektion.

2) Es ist in der Oberfläche der Kugel selbst gelegen: die *stereographische* Projektion.[1])

---

1) Nach *Lambert* „Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung" III. Theil, p. 109: „Vermutlich in Ermangelung eines bestimmteren Ausdruckes."

3) Es fällt mit dem Mittelpunkte der Kugel zusammen: *centrale* oder *gnomonische* Projektion.

4) Es befindet sich ausserhalb der Kugel: *externe* Projektion.[1])

Bei allen diesen ist aber noch eine Grösse willkürlich, nämlich die geographische Breite des Mittelpunktes des darzustellenden Flächentheiles. Je nach der verschiedenen Wahl desselben unterscheidet man:

a) *Polarprojektionen*, wenn $\beta = 90^0$, also der Pol Mittelpunkt der Karte ist.

b) *Aequatorealprojektionen*, wenn $\beta = 0$, d. h. ein Punkt des Aequators Mittelpunkt der Karte ist.

c) *Horizontalprojektionen*, wenn β beliebig bleibt.

1. Orthographische Projektion.

6. Die Gleichungen derselben entstehen, wenn man in den Gleichungen I, II, III $a = D = \infty$ setzt. Dividiert man zu diesem Behufe zuerst Zähler und Nenner durch a, und setzt dann die Verhältnisse:

$$\frac{D}{a} = 1, \quad \frac{r}{a} = 0,$$

so folgt

$$\left.\begin{aligned} x &= r \sin\lambda \cos\varphi \\ y &= r\,(\cos\beta \sin\varphi - \sin\beta \cos\varphi \cos\lambda) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \cos v \\ k_2 &= 1 \qquad K = \cos v \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\omega' &= \operatorname{tg}\omega \sec v \\ \sin\frac{\delta}{2} &= \operatorname{tg}\frac{v^2}{2} \end{aligned}\right\} . \tag{4}$$

7. *a*) Die **orthographische Polarprojektion** entsteht hieraus für $\beta = 90^0$; ihre Gleichungen sind

$$\left.\begin{aligned} x &= r \sin\lambda \cos\varphi \\ y &= -\,r \cos\lambda \cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

Die Elimination von φ wird durch Division der beiden Gleichungen erzielt, man erhält dadurch

$$y = -\,x \cot\lambda \tag{5a}$$

als Gleichung der Meridiane; quadriert und addiert man die Gleichungen (2a), so folgt:

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos\varphi^2 \tag{6a}$$

als Gleichung der Parallelkreise. — Man ersieht hieraus, dass die Meridiane durch gerade Linien dargestellt werden, welche durch den Mittelpunkt der Karte (den Pol) gehen, so dass der von den Bildern

1) Nach *Steinhauser*; *Fiorini* nennt sie *Scenographische* Projektion.

zweier Meridiane eingeschlossene Winkel gleich ist dem Längenunterschiede der beiden Meridiane, und dass die Bilder der Parallelkreise concentrische Kreise (mit dem Pole als gemeinschaftlichen Mittelpunkt) von dem Halbmesser $r \cos \varphi$ sind. Die Construktion des Netzes bietet keine Schwierigkeiten, und kann leicht in folgender Weise ausgeführt werden: Stelle (Fig. 3) die Zeichnungsfläche die durch den Kugelmittelpunkt ge-

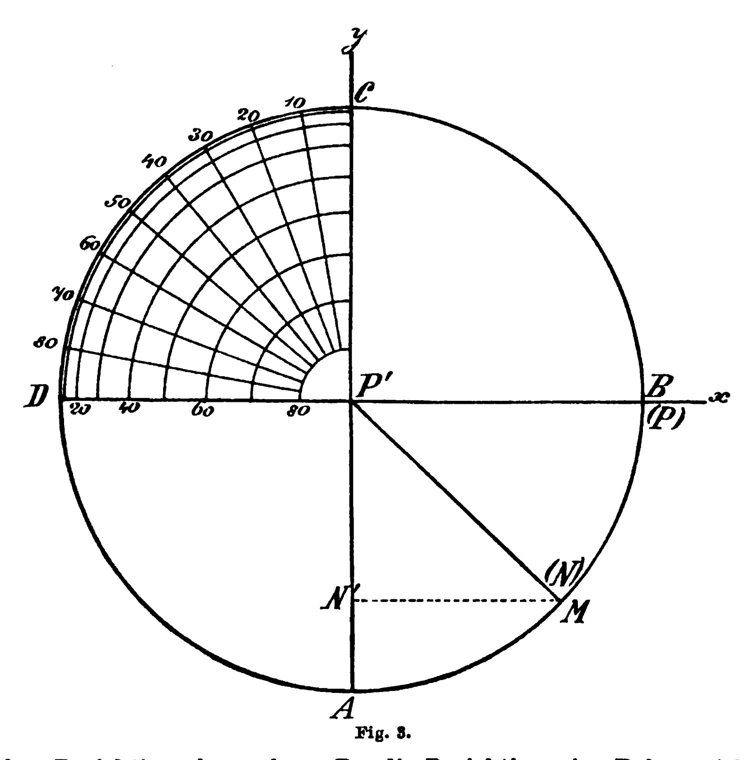


Fig. 3.

dachte Projektionsebene dar. Da die Projektion eine Polarprojektion werden soll, so stellt der Kreis $ABCD$, welcher der Schnitt der Kugel mit der Projektionsebene ist, den Äquator vor; das in P' auf die Zeichnungsfläche errichtete Perpendikel enthält die (im Raume gedachten) Pole PP_1, von denen jedoch nur einer zu betrachten ist, da nur eine der beiden Hemisphären dargestellt werden kann; sei nun $P'C$ die positive Y-axe, $P'B$ die positive X-axe, so hat man die Längen in der Richtung AB zu zählen; die Ebenen der Meridiane stehen senkrecht auf der Projektionsebene, daher sind ihre Schnitte mit der letzteren gleichzeitig die Projektionen der Meridiane. Ist also $AP'M = \lambda$, so ist $P'M$ das Bild des Meridians von der Länge λ. Theilt man demnach den ganzen Kreis $ABCD$ etwa von 10 zu 10 Graden ein, und zieht die zugehörigen Radien, so erhält man das Netz der Meridiane (in der Figur sind dieselben für einen Quadranten verzeichnet), wobei es nun aber gleichgiltig bleibt, welches derAnfangs-

punkt der Zählung ist. Denken wir uns nun den ersten Meridian APC um AC in die Projektionsebene umgelegt[1]), so dass er in die Lage von $A(P)C$ kömmt (wobei (P) selbstverständlich mit B zusammenfällt). Denkt man sich ferner einen Punkt N von der Breite φ in dem ersten Meridian AP und die diesem Punkt entsprechende projicierende Gerade NN' mit der Ebene des ersten Meridians umgelegt, so kömmt N nach (N), NN' nach $(N)N'$, wenn $AP'(N) = \varphi$ ist; es ist demnach N' die Projektion dieses Punktes, und da die Projektionen der Parallelkreise notwendig Kreise sind, deren Mittelpunkte in P' liegen, weil die Ebenen der Parallelkreise parallel sind zur Projektionsebene, so ist der mit $P'N'$ als Halbmesser aus dem Mittelpunkte P' beschriebene Kreis das Bild des Parallelkreises von der Breite φ. Die Construktion der Parallelkreise wird daher die folgende: Man theilt einen Quadranten etwa von 10^0 zu 10^0 (wozu auch schon die für die Meridiane erhaltenen Theilpunkte benützt werden können) und fällt aus denselben Perpendikel auf AC; die durch die einzelnen Fusspunkte aus dem Mittelpunkte P' beschriebenen Kreise geben die Schaar der Parallelkreise. Die Form des Kartennetzes wird durch den einen in Fig. 3 dargestellten Quadranten versinnlicht.

Da Winkel $AP'M = \lambda$, so ist die Gleichung der Linie $P'M$ in rechtwinkligen Coordinaten

$$-\frac{y}{x} = \cot \lambda$$

und der Halbmesser $P'N'$ für das Bild des Parallelkreises von der Breite $AP'(N) = \varphi$:

$$P'N' = P'(N) \cos \varphi = r \cos \varphi$$

in Übereinstimmung mit den analytischen Resultaten.

8. *b*) Die **orthographische Äquatorealprojektion**. Da für diese $\beta = 0$, so folgt aus den Gleichungen (2):

$$\left.\begin{aligned} x &= r \sin \lambda \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{b})$$

Behufs Elimination von φ dividiere man die erste durch $\sin \lambda$, quadriere die so entstehende Gleichung und die zweite der Gleichungen (2b) und addiere; man erhält hierdurch

$$\frac{x^2}{\sin \lambda^2} + y^2 = r^2$$

---

1) Der Punkt P kommt in der Figur nicht vor, und ist im Raume senkrecht über P' zu denken; dem Gebrauche in der deskriptiven Geometrie gemäss, werden in der Folge die räumlichen Punkte mit A, B, C... ihre Projektionen auf verschiedenen Ebenen mit den entsprechenden accentuierten Buchstaben $A'B'C'$... $A''B''C''$... etc. und die Umlegungen durch die in runden oder eckigen Klammern eingeschlossenen Buchstaben (A), (B), (C),... $[A]$, $[B]$, $[C]$,... bezeichnet werden.

oder

$$\frac{x^2}{(r \sin \lambda)^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1 \tag{5 b}$$

als Gleichung des Meridians von der Länge λ. Da die zweite Gleichung (2 b) λ nicht enthält, so stellt die Gleichung

$$y = r \sin \varphi \tag{6 b}$$

bereits die Gleichung des Parallelkreises von der Breite φ vor.[1])

Die Meridiane der Karte sind demnach Ellipsen, deren gemeinschaftliche grosse Axe in der Richtung der y gleich r, deren kleine Axe in der Richtung der x gleich $r \sin \lambda$ ist; die Parallelkreise sind Gerade, die im Abstande $r \sin . \varphi$ zur X-axe parallel gezogen sind.

Zur Construktion denken wir uns wieder die Projektionsebene durch den Kugelmittelpunkt gelegt. Ist dann (Fig. 4) $APBP_1$ der Schnitt derselben mit der Kugel, so befindet sich das Auge senkrecht

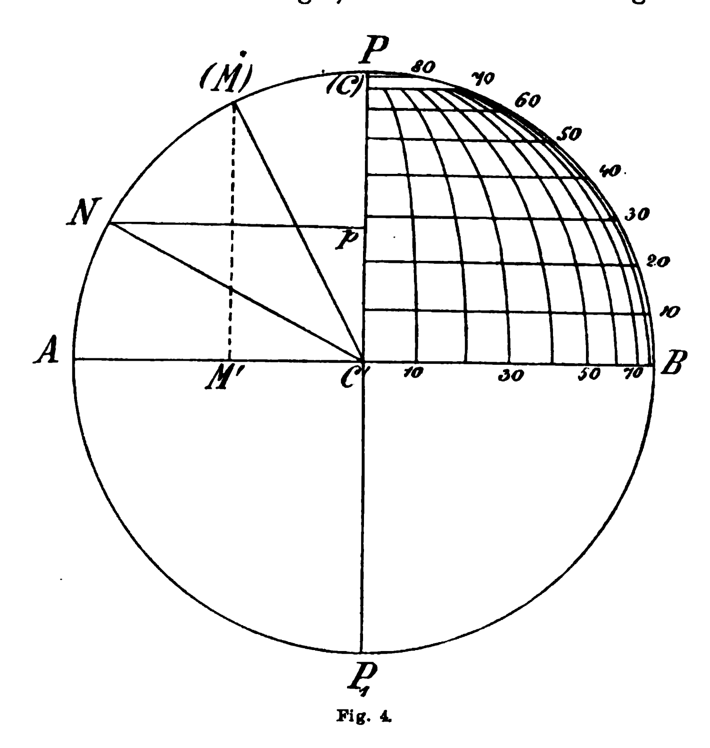


Fig. 4.

über C' in unendlicher Entfernung, und da es der Voraussetzung nach im Äquator liegen soll, so muss dieser Kreis ein Meridian sein, und zwei Punkte P, P_1 desselben sind daher die Pole der Erde. Ist der Winkel $AC'N = \varphi$, so ist N ein Punkt des Meridians AP von der geogra-

1) Kürze halber wird oft statt „Bild des Meridianes", „Bild des Parallelkreises", „Meridian", „Parallelkreis" gesagt werden, wo eine Verwechslung nicht stattfinden kann.

phischen Breite φ und die durch N senkrecht auf PP_1 gelegte Ebene die Ebene des Parallelkreises dieser Breite. Der Schnitt dieser Ebene mit der Zeichnungsfläche ist gleichzeitig die Orthogonalprojektion des Parallelkreises, daher ist die durch N parallel zu AB gezogene Gerade das Bild des Parallelkreises von der Breite φ; die Schaar der Parallelkreise auf der Karte wird demnach construiert, indem man den Bogen BP etwa von 10^0 zu 10^0 theilt, und durch die Theilungspunkte die Parallelen zu AB zieht.

Die Meridiane auf der Kugel sind Kreise, welche sämmtlich durch PP_1 gehen, ihre Projektionen sind demnach Ellipsen, deren grosse Axe PP_1 ist, und deren kleine Axe in die Richtung AB fällt; die Länge der letzteren hängt von der Neigung der Meridianebene gegen die Zeichnungsfläche ab; da aber AB die Projektion des Äquators ist, so braucht man, um die Meridianellipse von der Länge λ zu finden, nur die Projektion des in dem Äquator gelegenen Punktes des fraglichen Meridians zu suchen. Hierzu legen wir wieder den Äquator ACB um AB in die Zeichnungsfläche nach $A(C)B$ um (wobei (C) mit P zusammenfällt.) Der erste Meridian (der Meridian des Kartenmittelpunktes C') steht senkrecht auf der Projektionsebene, das Bild desselben ist daher $PC'P_1$ und der Punkt des Äquators, von dem aus die Längen gezählt werden, ist C, dessen Umlegung (C); ist also $(C)C'(M) = \lambda$, so ist (M) die Umlegung des Äquatorpunktes M, welcher der Längendifferenz λ entspricht, und das Perpendikel $(M)M'$ auf AB die Umlegung der Projicierenden von M, also M' die Orthogonalprojektion von M, und die Ellipse, deren Halbaxen $C'P$, $C'M'$ das Bild des Meridians von der Länge λ. Will man demnach die Meridiane auf der Karte etwa von 10^0 zu 10^0 verzeichnen, so hat man von den Theilpunkten von BP die Perpendikel auf AP zu fällen, und die Ellipsen zu zeichnen, für welche die Endpunkte der kleinen Axe durch die erhaltenen Fusspunkte gegeben sind, und deren gemeinschaftliche grosse Axe $C'P$ ist. Ein Quadrant des Netzes der Meridiane und Parallelkreise ist in Fig. 4 dargestellt.

Da für den Parallelkreis die Breite φ

$$C'p = C'N \sin C'Np = r \sin \varphi$$

und für den Meridian der Länge λ die grosse Halbaxe in der Richtung der $y : C'P = r$, die kleine in der Richtung der x

$$C'M' = C'(M) \sin C'(M)M' = r \sin \lambda,$$

so sieht man die Identität der analytischen und geometrischen Resultate.

9. *c*) **Die orthographische Horizontalprojektion.** Für diese gelten die Gleichungen (2) unverändert, nämlich

$$\left.\begin{aligned} x &= r \sin \lambda \cos \varphi \\ y &= r (\cos \beta \sin \varphi - \sin \beta \cos \varphi \cos \lambda) \end{aligned}\right\} \tag{2c}$$

Zur Elimination von φ oder λ schlagen wir einen Weg ein, der in der Folge immer wiederkehren wird. In den Gleichungen für x, y

tritt die zu eliminierende Grösse (sie werde allgemein für den Augenblick mit σ bezeichnet) in der Form von Winkelfunktionen auf, die sich stets auf $\sin\sigma$ und $\cos\sigma$ zurückführen lassen; wir betrachten daher die beiden Gleichungen als zwei Gleichungen mit den Unbekannten $\sin\sigma$, $\cos\sigma$, bestimmen letztere aus denselben, und setzen die gefundenen Ausdrücke in die Gleichung

$$\sin\sigma^2 + \cos\sigma^2 = 1$$

ein; aus dem Resultate ist σ verschwunden, daher die Elimination bewerkstelligt. Für den vorliegenden Fall hat man einfach aus der ersten Gleichung

$$\cos\varphi = \frac{x}{r\sin\lambda}$$

und dieses in die zweite eingesetzt, und $\sin\varphi$ bestimmt:

$$\sin\varphi = \frac{y + x\sin\beta\cot\lambda}{r\cos\beta};$$

demnach das Eliminationsresultat

$$\left(\frac{x}{r\sin\lambda}\right)^2 + \left(\frac{y + x\sin\beta\cos\lambda}{r\cos\beta}\right)^2 = 1$$

oder von Nennern befreit und gehörig geordnet:

$$x^2(\cos\beta^2 + \sin\beta^2\cos\lambda^2) + y^2\sin\lambda^2 + 2xy\sin\beta\sin\lambda\cos\lambda$$
$$= r^2\cos\beta^2\sin\lambda^2, \tag{5c}$$

welches die Gleichung des Meridians von der Länge λ ist.

Zur Elimination von λ erhält man aus der ersten Gleichung

$$\sin\lambda = \frac{x}{r\cos\varphi}$$

und dies in die zweite Gleichung eingesetzt:

$$\cos\lambda = \frac{r\cos\beta\sin\varphi - y}{r\sin\beta\cos\varphi}$$

daher

$$\left(\frac{x}{r\cos\varphi}\right)^2 + \left(\frac{y - r\cos\beta\sin\varphi}{r\sin\beta\cos\varphi}\right)^2 = 1 \tag{6c}$$

als Gleichung des Parallelkreises von der Breite φ. Hieraus folgt, dass sich die Parallelkreise auf der Karte als Ellipsen abbilden, deren Mittelpunkte auf dem ersten Meridian in der Entfernung

$$r\cos\beta\sin\varphi$$

vom Mittelpunkte der Karte entfernt sind, und deren Halbaxen, welche resp. gleich $r\cos\varphi$ und $r\cos\varphi\sin\beta$ sind, parallel zur X- und Y-axe liegen.

Auch bezüglich der Meridiane erhellt aus der Form der Gleichung (5c), dass sie durch Kegelschnitte dargestellt werden, deren Mittelpunkte in den Coordinatenursprung, also in den Kartenmittelpunkt fallen, deren Axen aber gegen die Coordinatenaxen um einen gewissen Winkel gedreht sind. Um die Grösse dieses Winkels und diejenige der Axen zu finden, bemerken wir, dass für einen Kegelschnitt, dessen Gleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + D = 0$$

ist, der von der positiven X-axe im positiven Sinne (so dass man nach einer Drehung von 90^0 zur positiven Y-axe kömmt) bis zur Hauptaxe des Kegelschnittes gezählte Winkel α bestimmt ist durch

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C}.$$

Die auf die Hauptaxe des Kegelschnittes bezogene Gleichung desselben wird dann

$$a_1 x_1^2 + a_2 y_1^2 + D = 0,$$

wenn a_1, a_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$a^2 - (A + C)a + (AC - B^2) = 0$$

sind.[1]) Man erhält hiernach zwei Werte von α, und zwei Werte von a; um zu entscheiden, welche einander entsprechen, kann man sich der Gleichung bedienen[2])

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{a_1 - A}{B},$$

welche übrigens auch zur Bestimmung des Winkels α dienen kann, wenn vorerst a berechnet wird. Im vorliegenden Falle ist

$$\begin{aligned}
A &= \cos\beta^2 + \sin\beta^2 \cos\lambda^2 \\
B &= + \sin\beta \sin\lambda \cos\lambda \\
C &= \sin\lambda^2 \\
A + C &= 1 + \sin\lambda^2 \cos\beta^2 \\
AC - B^2 &= \cos\beta^2 \sin\lambda^2 \\
\sqrt{(A + C)^2 - 4(AC - B^2)} &= 1 - \sin\lambda^2 \cos\beta^2
\end{aligned}$$

folglich, da

$$a = \frac{(A + C) \pm \sqrt{(A + C)^2 - 4(AC - B^2)}}{2}$$

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \sin\lambda^2 \cos\beta^2$$

und

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \sin\beta \operatorname{tg} \lambda.$$

Dreht man daher die X-axe um einen Winkel α_1, der bestimmt ist durch

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \sin\beta \operatorname{tg} \lambda,$$

so wird die auf das neue Axensystem bezogene Gleichung des Kegelschnittes

$$x_1^2 + \sin\lambda^2 \cos\beta^2 \, y_1^2 = r^2 \cos\beta^2 \sin\lambda^2,$$

wofür man auch schreiben kann

$$\frac{x_1^2}{r^2 \cos\beta^2 \sin\lambda^2} + \frac{y_1^2}{r^2} = 1$$

---

1) s. z. B. *Clebsch*, Vorlesungen über Geometrie, herausgegeben von *Lindemann*, I. Bd., p. 89.

2) Diese Gleichung folgt aus $A + B \operatorname{tg} \alpha = a_1$; l. c. Gleichung 14).

Die Meridiane werden daher durch Ellipsen dargestellt, deren kleine Axe gleich $r \cos \beta \sin \lambda$ ist, welche mit der X-axe des ursprünglichen Systems den Winkel α_1, gezählt von der positiven X-axe gegen die positive Y-axe einschliesst, und deren grosse Axe für alle Meridianellipsen constant gleich r ist.

Für die Construktion denken wir uns hier die Projektionsebene als tangierende Ebene an der Kugel; die Orthogonalprojektion der Kugel auf dieselbe sei der Kreis K (Fig. 5); die Projektion des Kugelmittelpunktes sei A' und dieser Punkt ist gleichzeitig der Mittelpunkt der Karte, da der Voraussetzung gemäss der Radius des Kartenmittelpunktes auf der Projektionsebene senkrecht steht.

Der Meridian von A', welcher auf der Projektionsebene senkrecht steht, wird durch die Gerade yA' dargestellt, welche Gerade gleichzeitig der Schnitt der Meridianebene von A' mit der Projektionsebene ist; legt man die Meridianebene um diese Gerade in die Zeichnungsfläche um, so wird der umgelegte Meridian (M) sein, (A) die Umlegung des Mittelpunktes des darzustellenden Flächentheiles und (O) die Umlegung des Kugelmittelpunktes.

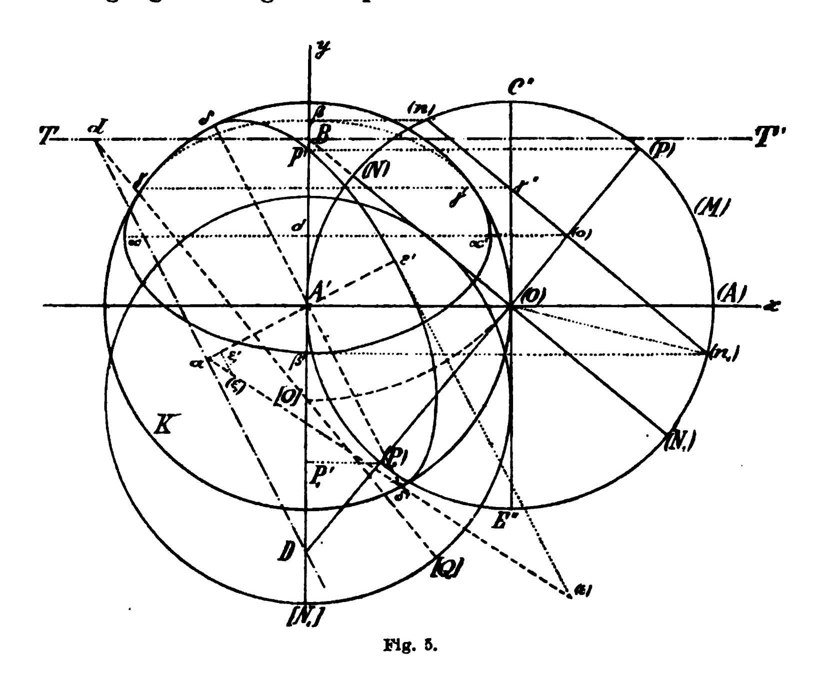


Fig. 5.

Sei nun β die geographische Breite von A, also die Poldistanz dieses Punktes $90 - \beta$; macht man demnach den Winkel $(A)(O)(P) = 90 - \beta$, so wird (P) die Umlegung des Nordpoles, $(P)(P_1)$ die Umlegung der Erdaxe und fällt man die Perpendikel $(P)P'$, $(P_1)P'_1$ auf $A'y$, so werden P', P'_1 die Projektionen der Pole.

Die sämmtlichen Parallelkreise schneiden die Ebene des ersten Meridians in parallelen, auf der Erdaxe senkrecht stehenden Geraden; in der Figur sind die Umlegungen zweier solcher Schnitte, des Äquatorschnittes NN_1 und desjenigen nn_1 eines Parallelkreises von der Breite φ $((n_1)(O)(N_1) = \varphi)$ verzeichnet. Wenn eine Ebene auf einer Geraden senkrecht steht, so steht bekanntlich die Spur dieser Ebene auf der Orthogonalprojektion der Geraden senkrecht; da nun die Ebenen der Parallelkreise senkrecht stehen auf der Axe PP_1, so stehen die Spuren derselben senkrecht auf $P'P'_1$, sind also parallel zur X-axe; daher sind auch die grossen Axen der die Parallelkreise darstellenden Ellipsen parallel zur X-axe, die kleinen Axen fallen in die Richtung $P'P'_1$; da (o) die Umlegung des Mittelpunktes des Parallelkreises ist, so ist, wenn $(o)o'$ senkrecht zu $P'P_1'$ gezogen wird, o' der Mittelpunkt der Ellipse, und wenn $o'\alpha' = o'\alpha = (o)(n_1)$ gemacht wird, so sind α, α' die Endpunkte der grossen Axe derselben; diejenigen Punkte des Parallelkreises, deren Projektionen in der Y-axe sind, liegen im ersten Meridian, sind also jene, deren Umlegung (n), (n_1) sind; die Fusspunkte β, β' der von diesen Punkten auf die Y-axe gefällten Perpendikel geben daher die Endpunkte der kleinen Axe. Man braucht natürlich nur jenen Theil der Ellipse, welcher der oberen Hemisphäre angehört, also bis zum Contourkreise K; um die Berührungspunkte genau zu ermitteln, denken wir uns eine zweite Orthogonalprojektion der ganzen Kugel auf die Meridianebene, und diese Projektion auch in der Umlegung der letzteren dargestellt. Es ist dann $C''E''$ die zweite Projektion des Contourkreises K, $(n)(n_1)$ die zweite Projektion des Parallelkreises, demnach γ'' die zweite Projektion der beiden Schnittpunkte dieser Kreise, daher die durch das Perpendikel $\gamma\gamma'\gamma''$ in dem Contourkreise K bestimmten Punkte γ, γ' die dem Parallelkreise der Karte $\alpha\beta'\alpha'\beta$ angehörigen Berührungspunkte.

Um die Bilder der Meridiane zu zeichnen, suchen wir zunächst wieder die Spuren ihrer Ebenen; hierzu genügt es die Durchstosspunkte zweier in der betreffenden Meridianebene liegenden Geraden zu kennen. Als solche wählen wir: 1) die Erdaxe; verlängert man die Umlegung (P) (P_1) bis zum Schnitte D mit der Y-axe, welche als Umlegungsaxe für die Meridianebene gilt, so ist, da alle Punkte der Umlegungsaxe bei der Drehung fest bleiben, D ein Punkt der Erdaxe PP_1 selbst, und als Punkt der in der Projektionsebene gelegenen Umlegungsaxe ebenfalls der Projektionsebene angehörig, daher der Durchstosspunkt der Erdaxe mit der Projektionsebene; die Spuren sämmtlicher Meridianebenen gehen also durch D. 2) Als zweite Gerade wählen wir die im Äquator gelegene, und hierzu legen wir die Äquatorebene um ihre Spur in die Zeichnungsfläche um. Diese Spur ist aber wie schon erwähnt senkrecht zur Y-axe, und um sie zu zeichnen, ist es notwendig einen Punkt derselben zu kennen. Ver-

längert man $(N)(N_1)$ bis zum Schnitt B mit der Y-axe, so ist B ein Punkt, der sowol der Äquator- als auch der Projektionsebene angehört, also ein Punkt der Spur, und TT' diese Spur selbst. Der Abstand des Kugelmittelpunktes von dieser ist $B\,(O)$; beim Herunterklappen der Äquatorebene um TT' kommt daher der Äquatormittelpunkt nach $[O]$ wenn $B(O) = B[O]$ gemacht wird, und $B[O]$ stellt die Schnittlinie der Äquatorebene mit der Ebene des ersten Meridians nach der Herablegung vor. Macht man $[N_1][O][Q] = \lambda$, so ist $[O]\,[Q]$ die Umlegung des Schnittes der Äquatorebene mit der Ebene des Meridians von der Länge λ, und der Punkt d, wo diese Gerade die Spur TT' schneidet, ist der Durchschnittspunkt der dem Äquator angehörigen Geraden OQ des gesuchten Meridians, demnach Dd die Spur der Ebene des letzteren und die durch A' parallel zu derselben gezogene Gerade $\delta\delta'$ ist die grosse Axe des Meridians der Karte; die Endpunkte der kleinen Axe liegen in dem Perpendikel $A'a$, welches die Projektion von Oa ist; legt man wieder das bei A' rechtwinkelige Dreieck OaA' um aA' in die Zeichnungsfläche, so dass O nach δ' kömmt [eigentlich würde dorthin der Buchstabe $((O))$ gehören] weil $A'O$ gleich dem Kugelhalbmesser ist, macht $\delta'(\varepsilon) = \delta'(\varepsilon_1)$ gleich dem Kugelhalbmesser und projiciert die umgelegten Punkte (ε), (ε_1) wieder zurück nach ε', ε_1' so sind dieses die Endpunkte der kleinen Axe.[1]) Natürlich muss die Ellipse auch durch $P'P_1'$ gehen, doch wird von derselben nur der eine (hier oberhalb, also von der Spur Dd entferntere) Theil zu zeichnen sein. Zur Construktion wird man, nachdem man $(A)(O)(P) = 90^0 - \beta$ oder $(A)(O)(N_1) = \beta$ gemacht hat, den Kreis (M) von (P) aus z. B. von 10^0 zu 10^0 eintheilen und die Perpendikel auf $(P)(P_1)$ fällen; die Theilpunkte $(n)(n_1)$ und die Schnittpunkte (o) werden in die Y-axe projiciert, und auf die Projicierenden $(o)o'$ die Längen $o'\alpha = o'\alpha_1 = (o)(n_1)$ aufgetragen, wodurch man die Endpunkte der beiden Axen der jeden Parallelkreis darstellenden Ellipse erhält. Das von dem Schnittpunkte γ'' auf $A'y$ gefällte Perpendikel bestimmt im Contourkreise K die Berührungspunkte desselben mit dem Parallelkreise.

Verlängert man $(N)(N_1)$ bis B, zieht TBT' senkrecht auf $A'y$, macht $B[O] = B(O)$, zieht durch $[O]$ Gerade, welche untereinander Winkel z. B. von je 10^0 (von $A'[N_1]$ gezählt) einschliessen, und verbindet ihre Schnittpunkte d (auf TT') mit dem durch die Verlängerung von $(P)(P_1)$ bestimmten Punkte D, so erhält man die Richtungen der grossen Axen. Nun macht man $A'\delta' \parallel Dd$; $A'a \perp Dd$;

1) Die Construktion ist hiernach viel einfacher und leichter als die der Begründung halber ausführliche Beschreibung sie zeigt; auch hätte bezüglich der Construktion des Schnittes einer Ebene mit einer Kugel auf die Lehrbücher der darstellenden Geometrie verwiesen werden können, doch konnte, ohne zu grosse Weitläufigkeiten der Vorgang auch hier erörtert werden.

verbindet $a\delta'$, macht $\delta'(\varepsilon) = \delta'(\varepsilon_1)$; die Perpendikel $(\varepsilon)\varepsilon'$, $(\varepsilon_1)\varepsilon'_1$ bestimmen auf $A'a$ die Endpunkte der kleinen Axe. In dieser Weise ist das folgende Netz (Fig. 6), das die Parallelkreise und die Meridiane von 15^0 zu 15^0 enthält, für $\beta = 48^0$ gezeichnet.

Selbstverständlich kann man die Axen sowol der Lage als der Grösse nach auch durch Rechnung bestimmen, wozu die Formeln bereits angeführt sind, und wir wollen noch, wie dies bisher geschah, die Identität der erwähnten Construktion mit den analytischen Resultaten nachweisen. Es ist in Fig. 5:

$$A'B = A'(O) \operatorname{tg} (A)(O)(N_1) = r \operatorname{tg} \beta$$
$$A'D = A'(O) \cot A'D(O) = r \cot \beta$$
$$B(O) = A'(O) \sec (A)(O)(N_1) = r \sec \beta$$
$$BD = r (\operatorname{tg}\beta + \cot\beta) = \frac{r}{\sin\beta \cos\beta}$$
$$Bd = [O]B \operatorname{tg}[O][O][N_1] = (O)B \operatorname{tg}\lambda$$
$$= r \sec\beta \operatorname{tg}\lambda$$
$$\operatorname{tg} BDd = \frac{Bd}{BD} = r \sec\beta \operatorname{tg}\lambda \cdot \frac{\sin\beta \cos\beta}{r}$$
$$= \sin\beta \operatorname{tg}\lambda = \operatorname{tg}\alpha_1$$

daher ist $\sphericalangle BDd = \alpha_1$; es ist aber $\sphericalangle \varepsilon' A'(O) = \sphericalangle BDd$, daher auch $\varepsilon' A' O = \alpha_1$, wie es auch die analytische Ableitung ergiebt. Es ist ferner

$$A'a = A'D \sin\alpha_1 = r \cot\beta \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \cot\lambda^2 \operatorname{cosec}\beta^2}}$$
$$\operatorname{tg} A'a\delta' = \frac{A'\delta'}{A'a} = \frac{\sqrt{1 + \cot\lambda^2 \operatorname{cosec}\beta^2}}{\cot\beta} = \sqrt{\operatorname{tg}\beta^2 + \cot\lambda^2 \sec\beta^2}$$
$$\cos A'a\delta' = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} A'a\delta'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}\beta^2 + \cot\lambda^2 \sec\beta^2}}$$
$$= \frac{1}{\sec\beta \operatorname{cosec}\lambda} = \cos\beta \sin\lambda,$$

daher

$$A'\delta' = r$$
$$A'\varepsilon' = r \cos\beta \sin\lambda.$$

Da ferner

$$\sphericalangle (n_1)\gamma''(O) = (N_1)(O)E'' = 90 - \beta,$$

so ist

$$(o)(n_1) = r \cos\varphi$$
$$\beta' o' = (o)(n_1) \cos (n_1)(\gamma'')(O) = r \cos\varphi \sin\beta$$
$$o'\alpha' = (o)(n_1) = r \cos\varphi$$

also in völliger Übereinstimmung mit den analytischen Resultaten.

Da die Formeln 3 und 4 (§ 6) nicht von β abhängig gemacht wurden, sondern die Vergrösserung und Winkeländerung in einem Punkte als Funktion der Entfernung dieses Punktes vom Kartenmittelpunkte angeben, so gelten dieselben in gleicher Weise für die

Polar-, Aquatoreal- und Horizontalprojektion; für die erstere hat man nur statt v die Poldistanz gleich $90 - \varphi$ zu setzen.[1]) Tafel 1 giebt die Werte von $k_1 = K$ und $\frac{\delta}{2}$ für die aufeinanderfolgenden Werte von v von 10^0 zu 10^0. Man sieht aus derselben, dass der Massstab der Karte gegen den Rand zu sehr rasch abnimmt, und die durch die Winkeländerung bedingte Deformation ebenfalls sehr rasch wächst. Bei der Polar- und Äquatorealprojektion sieht man dies auch unmittelbar aus der Figur, indem die am Rande der Karte gelegenen Zonen in sehr starker Verkürzung dargestellt werden. Demnach eignet sich die Karte höchstens für Gebiete, die sich nur über wenige Grade erstrecken, aber auch hier wird die Verzerrung bei etwas grösserem Massstabe schon sehr beträchtlich. Am besten eignet sich die orthographische Projektion noch zur Darstellung von Planetenoberflächen, z. B. Mondkarten, da die so dargestellten Karten die Himmelskörper gerade in der Art zeigen, wie sie das Auge, dessen Entfernung vom Himmelskörper hier gleich unendlich angenommen werden kann, wahrnimmt.

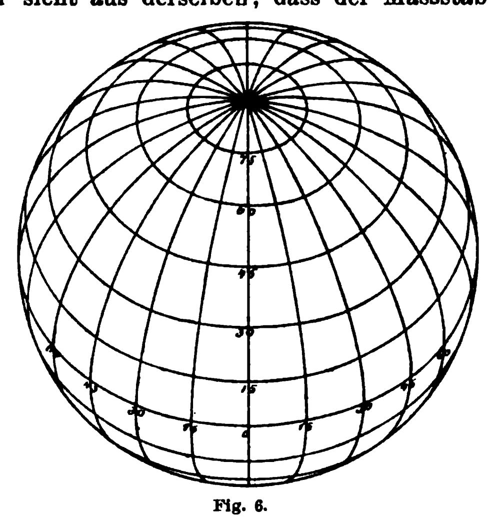


Fig. 6.

2. Stereographische Projektion.

10. Bei dieser Projektionsart liegt das Auge in der Kugeloberfläche selbst. Legen wir die Projektionsebene durch den Mittelpunkt der Kugel, so haben wir

$$a = D = r$$

zu setzen. Ehe wir aber auf die hieraus resultierenden Gleichungen übergehen, wollen wir einige für die Folge wichtige Eigenschaften dieser Projektion auf direktem Wege ableiten.

Befinde sich (Fig. 7) das Auge in O, und sei EE' die Projektionsebene; man sieht sofort, dass es hier möglich ist, gleichzeitig die ganze Erde abzubilden, indem das Bild derjenigen Hemisphäre, in

1) Die Werte von k_1 und k_2 sind bezüglich ein Maximum und Minimum; für die Polarprojektionen finden dieselben in der Richtung der Meridiane und Parallelen statt. Für Äquatoreal- und Horizontalprojektion jedoch nicht. Es hängt dies, wie später gezeigt wird, mit dem Umstande zusammen, dass die Parallelen und Meridiane der Karte nicht aufeinander senkrecht stehen.

welcher der Gegenpunkt M des Auges enthalten ist, innerhalb, das der zweiten ausserhalb des Schnittkreises K der Kugel mit der Projektionsebene fällt; nur das Bild von O kann nicht erhalten werden, indem es in unendliche Entfernung fällt. Die Projektion jedes grössten oder kleinen Kreises, der durch O geht, ist offenbar eine Gerade, denn die Projektionsstrahlen liegen für diesen Kreis sämmtlich in der Ebene desselben, deren Schnitt mit EE' daher die Projektion des Kreises ist.

Die Projektion irgend eines anderen grössten oder kleinen Kreises der Kugel ist ein Kreis. Sei ab der Durchmesser eines Kugelkreises, (der als Sehne des Contourkreises angenommen werden kann, indem

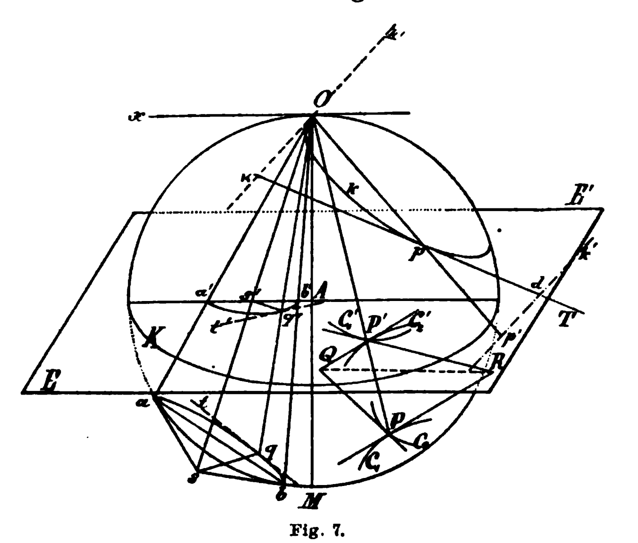


Fig. 7.

man den grössten Kreis, welcher O mit dem Mittelpunkte des Kreises ab verbindet, als Contourkreis ansehen kann). Die sämmtlichen Projektionsstrahlen bilden einen Kegel, dessen Spitze O, und dessen Basis der Kreis ab ist; die Projektion des letzteren ist demnach der Schnitt dieses Kegels mit EE', also $a'b'$; zieht man in der Ebene des Axenschnittes Oab in O die Tangente Ox, so ist dieselbe parallel zu $a'A$, daher ist $\sphericalangle\, xOa' = Oa'b'$ und da $\sphericalangle\, xOa' = xOa = Oba$, weil die beiden letzten im Kreise Oab über demselben Bogen stehen, so ist

$$\sphericalangle\, Oa'b'\ \sphericalangle\, Oba;$$

daraus folgt, dass ab und $a'b'$ antiparallele oder sogenannte Wechselschnitte des Kegels Oab sind, demnach $a'b'$ auch ein Kreis.

Sei nun pT irgend eine beliebige Tangente in einem beliebigen Punkte p an die Kugel, d ihr Durchstosspunkt mit der Projektionsebene; legt man durch p und O den die Tangente T berührenden kleinen Kreis k (indem man durch T und O eine Ebene legt, und deren Schnitt mit der Kugel sucht), so muss dessen Projektion k'

durch die Projektion p' von p und durch d gehen, und es muss $pd = p'd$ sein. Zieht man, um das letztere zu beweisen, in O die Tangente $\varkappa\varkappa'$ an k, die natürlich parallel zu EE', also parallel zu k' werden muss, so wird

$$\sphericalangle pp'd = \varkappa Op = Op\varkappa,$$

indem die beiden letzten Winkel die von den beiden Tangenten $\varkappa O$ und $\varkappa p$ mit der Sehne Op gebildeten Winkel sind; daher weiter

$$\sphericalangle pp'd = Op\varkappa = dpp'$$

folglich das Dreieck pdp' gleichschenklig mit der Grundlinie pp', also $pd = p'd$. Hieraus folgt, dass die Länge einer in irgend einem Punkte der Kugel in einer beliebigen Richtung gezogenen Tangente zwischen dem Berührungspunkte mit der Kugel und dem Durchstosspunkte mit der Projektionsebene gleich ist der Projektion dieses Stückes.

Hat man nun zwei Curven C_1, C_2 auf der Kugel, deren Projektionen C'_1, C'_2 sind, ist P' die Projektion des Schnittpunktes P dieser Curven; seien die Tangenten in P an die beiden Curven PQ und PR, ihre Projektionen $P'Q$ und $P'R$ (wenn Q, R die Durchstosspunkte der Tangenten mit der Projektionsebene sind) welche Tangenten an C'_1, C'_2 sind, (da die Projektion der Tangente einer Raumcurve Tangente der Projektion der Curve ist), so ist nach dem oben gesagten

$$QP = QP'$$
$$RP = RP'.$$

Zieht man noch die Verbindungslinie QR, so sind, da

$$QR = QR$$

die beiden Dreiecke QPR und $QP'R$ congruent, daher

$$\sphericalangle QPR = QP'R;$$

also schneiden sich die Projektionen zweier beliebiger Curven unter demselben Winkel wie diese selbst.[1]) Hat man daher auf der Kugel ein unendlich kleines Dreieck, welches man als eben ansehen kann, und zeichnet seine Projektion, so werden die entsprechenden Winkel dieser beiden Dreiecke einander gleich, daher die Projektion dieses unendlich kleinen Dreieckes diesem selbst ähnlich, folglich die entsprechenden Seiten proportional sein. Anders ausgedrückt: das Verhältnis jeder unendlich kleinen Strecke zu ihrer Projektion ist in jedem Punkte, unabhängig von der Richtung, dasselbe, also das Vergrösserungsverhältnis in einem Punkte unabhängig vom Azimute. Die stereographische Projektion hat folglich die Eigenschaft der Ähnlichkeit in den unendlich kleinen Theilen.

1) Für Kugelkreise hat *Hook* diese Eigenschaft zuerst erkannt; s. *Halley* Phil. Transact. Bd. XIX. pag. 205 (Jahrg. 1695—1697). „An easy Demonstration of the Analogy of the Logarithmic Tangents to the Meridian Line or sum of the secants.“

Sei aqb wieder ein beliebiger Kugelkreis, $aqbs$ der umschriebene Kegel, dessen Spitze s, und sq eine Erzeugende desselben. Da sq folglich auch der Schnitt der durch sq und O gelegten Ebene mit der Kugel (ein Kreis, den wir nicht weiter berücksichtigen) auf der Tangente t in q senkrecht steht, so wird auch die Projektion $s'q'$ von sq (als Projektion jenes nicht gezeichneten Kugelkreises) auf der Tangente in q' senkrecht stehen, also ein Radius des Kreises $a'q'b'$ sein; die Projektionen der Erzeugenden des einem Kugelkreise umschriebenen Kegels sind demnach Radien der Projektion des Kreises, Mittelpunkt des letzteren ist daher die Projektion s' der Kegelspitze s; eine Eigenschaft, die wir später zur Construktion der Mittelpunkte verwenden werden. Für einen grössten Kugelkreis geht der umschriebene Kegel in einen umschriebenen Cylinder über; die projicierende Os ist eine durch O parallel zu den Cylindererzeugenden, d. h. senkrecht auf die Ebene des grössten Kreises gezogene Gerade.[1]) Der Mittelpunkt der Projektion eines grössten Kreises ist also der Durchstosspunkt des durch das Auge auf die Ebene des grössten Kreises gezogenen Perpendikels mit der Projektionsebene.

Setzen wir nun in den Formeln I, II, III, III',

$$r = D = a,$$

so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{r \sin \lambda \cos \varphi}{1 + \sin \beta \sin \varphi + \cos \beta \cos \varphi \cos \lambda} \\ y &= \frac{r (\cos \beta \sin \varphi - \sin \beta \cos \varphi \cos \lambda)}{1 + \sin \beta \sin \varphi + \cos \beta \cos \varphi \cos \lambda} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$$k_1 = k_2 = k = \frac{1}{2 \cos \frac{1}{2} v^2}, \quad K = \frac{1}{4 \cos \frac{1}{2} v^4} \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} \omega' = \operatorname{tg} \omega; \; \delta = o \quad (9)$$

Es zeigt sich also auch hier, dass bei allen stereographischen Projektionen das Vergrösserungsverhältnis von dem Azimute unabhängig ist, und dass die Winkel ungeändert bleiben. Man könnte nun fragen, ob es nicht noch andere perspektivische Projektionen giebt, welchen diese Eigenschaften zukommen; sollte dies der Fall sein, so müsste k^2 von ω unabhängig werden; schreiben wir

$$k^2 = \frac{D^2}{(a + r \cos v)^2} \left\{ \left[\left(\frac{r + a \cos v}{a + r \cos v} \right)^2 - 1 \right] \cos \omega^2 + 1 \right\},$$

so sieht man, dass die obige Bedingung erfüllt ist, wenn

$$\frac{r + a \cos v}{a + r \cos v} = \pm 1,$$

woraus

$$(a \pm r)(1 \pm \cos v) = 0$$

folgt, welche Bedingung für jeden Punkt, d. h. für jede beliebige Entfernung vom Kartenmittelpunkte nur erfüllt ist für $a = \pm r$, also

1) Dieser Satz rührt von *Maurolicus* her; s. *Francisci Maurolici* Abbatis Messanensis opuscula mathematica. Venetiis 1575 pag. 64.

(ohne Rücksicht auf das Zeichen) für $a = r$; dasselbe Resultat folgt aus den Gleichungen III oder III'.

11. *a*) Die **stereographische Polarprojektion.** Setzt man in den Gleichungen (7) $\beta = 90^0$ so entsteht

$$x = + \frac{r \sin \lambda \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}$$

$$y = - \frac{r \cos \lambda \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}$$

oder, weil $\frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi} = \frac{\sin (90 - \varphi)}{1 + \cos (90 - \varphi)} = \operatorname{tg}\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)$

$$\left.\begin{aligned} x &= r \sin \lambda \operatorname{tg}\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right) \\ y &= - r \cos \lambda \operatorname{tg}\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{a})$$

Durch Division der beiden Gleichungen eliminiert man φ, und erhält als Gleichung der Meridiane

$$y = - x \cot \lambda \qquad (10\text{a})$$

Quadriert und addiert man die beiden Gleichungen, so folgt als Gleichung der Parallelkreise

$$x^2 + y^2 = r^2 \operatorname{tg}\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)^2 \qquad (11\text{a})$$

Die Meridiane werden demnach durch gerade Linien dargestellt, welche mit der negativen Y-axe den Winkel λ einschliessen; gleichen Längendifferenzen auf der Kugel entsprechen auch gleiche Winkel zwischen den Kartenmeridianen, und es ist daher gleichgiltig, welchen Meridian man als ersten ansieht. Die Parallelkreise der Karte sind Kreise deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt der Pol und deren Halbmesser $r \operatorname{tg}\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)$ ist.

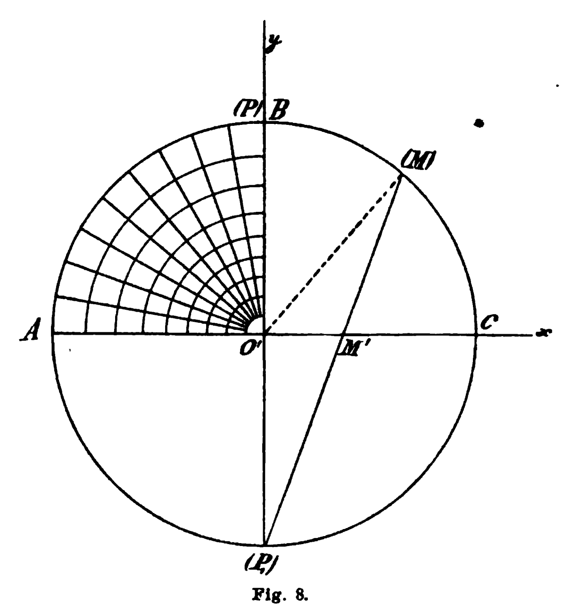


Fig. 8.

Ist in Fig. 8 der mit dem Kugelhalbmesser beschriebene Kreis ABC der Schnitt der Kugel mit der Projektionsebene, also die stereographische Projektion des Äquators, so befinden sich die beiden Pole senkrecht über O'; da die Meridianebenen ebenfalls

auf der Zeichnungsfläche senkrecht stehen und den Augpunkt (den einen Pol) enthalten, so sind die unter gleichen Winkeln gezogenen Radien die Meridiane der Karte, welche also sehr einfach erhalten werden, indem man die Radien der Theilpunkte des etwa von 10^0 zu 10^0 getheilten Äquators zieht.

Für einen Meridian der Länge λ, gezählt von (P_1) gegen C hin ist dann $y = -x \cot \lambda$.

Um die Bilder der Parallelkreise zu zeichnen, denken wir uns den Meridian APC um AC in die Zeichnungsfläche umgelegt, so dass der Pol P nach (P), der zweite Pol (Augpunkt) nach (P_1) kömmt. Der Punkt des Parallels der geographischen Breite φ kömmt nach (M), wenn $(M)O'C = \varphi$ und der Projektionsstrahl dieses Punktes wird in der Umlegung durch $(M)(P_1)$ dargestellt, so dass also M' die Projektion des Punktes ist, und $O'M'$ der Halbmesser des Parallels der Karte. Die in AC gelegenen Punkte der Parallelkreise findet man demnach sehr einfach als Schnittpunkte von AC und der Verbindungslinien von (P_1) mit den bereits erhaltenen Theilpunkten des Kreises ABC. Selbstverständlich kann man das Netz auch ausserhalb des Kreises ABC fortsetzen, doch nimmt die Entfernung der Bilder der äquidistanten Parallelkreise sehr rasch zu, wie aus Tafel 3 folgt, welche in der Columne ϱ die Halbmesser der Parallelen für die Karte von 10^0 zu 10^0 giebt, wobei der Äquatorhalbmesser gleich 1 gesetzt ist. Man kann sich dieser Tafel auch zur Zeichnung des Kartennetzes bedienen, obzwar die obige Construktion wol meist ausreichen wird, da die Verwendung dieser Projektionsart ziemlich beschränkt ist, und sich nur auf die Darstellung von Planiglobien in kleinem Massstabe erstreckt. Die Identität der Construktion mit der Formel kann algebraisch dadurch erwiesen werden, dass

$$\sphericalangle O'D(M) = \tfrac{1}{2}(M)O'B = \tfrac{1}{2}(90 - \varphi) = 45 - \tfrac{1}{2}\varphi$$

und

$$O'M' = \varrho = O'D \operatorname{tg} O'DM' = r \operatorname{tg}(45 - \tfrac{1}{2}\varphi).$$

Lambert gab in seinen „Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung“ 1772. III., p. 119 folgende Lösung der Aufgabe, die Entfernung zweier Punkte auf der Kugel zu finden, deren stereographische Projektionen gegeben sind. Sind die beiden Punkte auf der Kugel A, B, ihre Meridiane AP, BP, welche am Pole den Winkel λ gleich der Längendifferenz der beiden Punkte einschliessen, seien die Poldistanzen der beiden Punkte $AP = p_1$, $BP = p_2$; die Entfernung der beiden Punkte $AB = s$, so folgt aus dem sphärischen Dreiecke ABP:

$$\cos s = \cos p_1 \cos p_2 + \sin p_1 \sin p_2 \cos \lambda$$

oder

$$1 - 2\sin\frac{s^2}{2} = \left(1 - 2\sin\frac{p_1^2}{2}\right)\left(1 - 2\sin\frac{p_2^2}{2}\right)$$
$$+ 4\sin\frac{p_1}{2}\sin\frac{p_2}{2}\cos\frac{p_1}{2}\cos\frac{p_2}{2}\cos\lambda$$
$$\sin\frac{s^2}{2} = \sin\frac{p_1^2}{2} - \sin\frac{p_1^2}{2}\sin\frac{p_2^2}{2}$$
$$+ \sin\frac{p_2^2}{2} - \sin\frac{p_1^2}{2}\sin\frac{p_2^2}{2} - 2\sin\frac{p_1}{2}\sin\frac{p_2}{2}\cos\frac{p_1}{2}\cos\frac{p_2}{2}\cos\lambda$$
$$= \sin\frac{p_1^2}{2}\cos\frac{p_2^2}{2} + \sin\frac{p_2^2}{2}\cos\frac{p_1^2}{2} - 2\sin\frac{p_1}{2}\sin\frac{p_2}{2}\cos\frac{p_1}{2}\cos\frac{p_2}{2}\cos\lambda,$$

daher

$$\frac{\sin\frac{s^2}{2}}{\cos\frac{p_1^2}{2}\cos\frac{p_2^2}{2}} = \operatorname{tg}\frac{p_1^2}{2} + \operatorname{tg}\frac{p_2^2}{2} - 2\operatorname{tg}\frac{p_1}{2}\operatorname{tg}\frac{p_2}{2}\cos\lambda.$$

Da aber $\varrho = r\operatorname{tg}\frac{p}{2}$, wenn ϱ die Entfernung des Bildes desjenigen Punktes vom Pole ist, dessen Poldistanz p ist, so folgt

$$\frac{r^2\sin\frac{s^2}{2}}{\cos\frac{p_1^2}{2}\cos\frac{p_2^2}{2}} = \varrho_1^2 + \varrho_2^2 - 2\varrho_1\varrho_2\cos\lambda.$$

Seien a, b, die Bilder der Punkte A, B; P' das Bild des Poles P; dann ist $aP' = \varrho_1$; $bP' = \varrho_2$ und in der stereographischen Projektion $\sphericalangle aP'b = \lambda$, daher

$$ab^2 = S^2 = \varrho_1^2 + \varrho_2^2 - 2\varrho_1\varrho_2\cos\lambda,$$

woraus unmittelbar folgt:

$$S = \frac{r\sin\frac{s}{2}}{\cos\frac{p_1}{2}\cos\frac{p_2}{2}}.$$

Hat man nun zwei Punktepaare a, b; a', b' unter denselben Poldistanzen p_1, p_2, aber mit den Längenunterschieden λ, λ', so hat man

$$ab = S = \frac{r\sin\frac{s}{2}}{\cos\frac{p_1}{2}\cos\frac{p_2}{2}}$$

$$a'b' = S' = \frac{r\sin\frac{s'}{2}}{\cos\frac{p_1}{2}\cos\frac{p_2}{2}}$$

wenn mit s, s' bez. die sphärischen Abstände der durch a, b; $a'b'$ dargestellten Punkte A, B; A', B' bezeichnet werden. Hieraus folgt:

$$S : S' = \sin\frac{s}{2} : \sin\frac{s'}{2} = \text{chord } AB : \text{chord } A'B'.$$

Wählt man für A', B' zwei Punkte deren Längendifferenz 0 oder 180° ist, die aber unter denselben geographischen Breiten liegen, wie A, B, so wird man mit Hilfe dieses Satzes leicht s aus S ermitteln können.

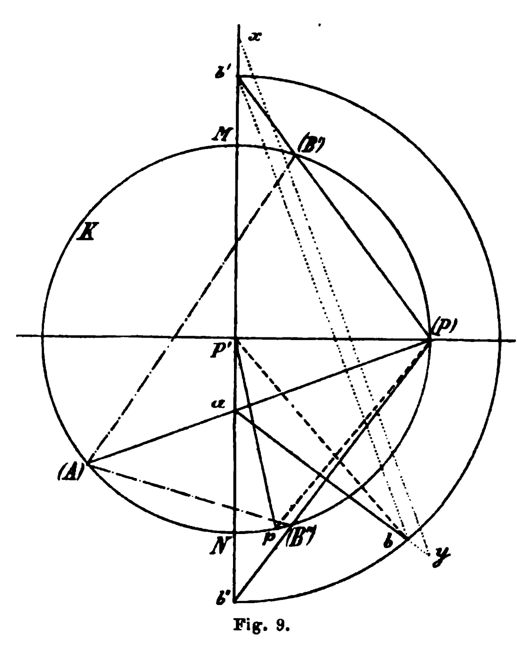


Fig. 9.

Sei Fig. 9 die sphärische Entfernung der beiden Punkte ab zu ermitteln.[1]) Zeichnen wir zwei Punkte b', b'', die in demselben Parallel mit b aber in dem Meridian von a liegen; sei nun

$$ab = S \quad AB = s$$
$$ab' = S' \quad AB' = s'$$
$$ab'' = S'' \quad AB'' = s'',$$

so ist nach dem eben gesagten

$$ab : ab' = \sin\frac{s}{2} : \sin\frac{s'}{2} = \text{chord } AB : \text{chord } AB'$$

$$ab : ab'' = \sin\frac{s}{2} : \sin\frac{s''}{2} = \text{chord } AB : \text{chord } AB''.$$

Die zu den Bögen AB' und AB'' gehörigen Sehnen lassen sich aber leicht constructiv finden. Stellt K den Äquator der Karte vor (wodurch der Massstab bestimmt wird) und denken wir uns die Kugel über demselben errichtet, und den Meridian MPN um MN umgelegt, so dass P nach (P) kömmt, so sind $a(P)$, $b'(P)$, $b''(P)$ die umgelegten Projektionsstrahlen, daher $(A), (B'), (B'')$ die Umlegungen der Kugelpunkte, also $(A)(B')$, $(A)(B'')$ die zugehörigen Sehnen, und man hat

$$ab : ab' = \text{chord } AB : (A)(B')$$
$$ab : ab'' = \text{chord } AB : (A)(B'').$$

Da aber, wenn A und B nur geringe Breitendifferenz haben, $(A)(B'')$ sehr klein ausfallen wird, so wird man meist die erste dieser Proportionen verwenden und durch Construktion der vierten geometrischen Proportionale zur Kenntnis von chord AB gelangen; macht man $ax = (A)(B')$ und zieht $xy \parallel bb'$, so ist $ay =$ chord AB, und trägt man dieselbe irgendwo am Kreisumfang auf, z. B. von (P) nach p, so giebt der zugehörige Centriwinkel $(P)P'p$ den sphärischen Abstand von ab.

1) D. h. die Entfernung der Punkte A, B, deren Bilder a, b sind.

Hat man ein in stereographischer Polarprojektion entworfenes Netz, so kann man diese Construktion zu rascher Ermittlung der Zenitdistanz eines Sternes für einen gegebenen Stundenwinkel benützen. Stellt nämlich P' den Weltpol, a das Zenit ($P'a$ = Äquatorhöhe) vor, so ist $P'a$ der Meridian des Ortes, und wenn $NP'b = \lambda$, so ist $P'b$ ein unter dem Stundenwinkel λ gezogener Stundenkreis; ist ferner $P'b$ gleich der Poldistanz des Sternes, so ist ab seine Zenitdistanz. Vortheilhaft ist die Construktion, wenn man eine grössere Anzahl von Zenitdistanzen braucht, weil für denselben Stern die Punkte b', x fest bleiben und der Stern sich im Kreise $b'bb''$ fortbewegt. Für einen anderen Stundenwinkel $NP'b_1$ hat man nur $b'b_1$ zu ziehen, $xy_1 \parallel b'b_1$ bis zum Schnitte mit ab_1 und zu ay_1 als Sehne entweder durch Construktion oder aus einer Sehnentafel den Winkel zu suchen.

Eine andere Lösung dieser Aufgabe befindet sich in § 13.

12. *b*) Die **stereographische Äquatorealprojektion.** Für $\beta = 0$ erhält man

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{r \sin\lambda \cos\varphi}{1 + \cos\varphi \cos\lambda} \\ y &= \frac{r \sin\varphi}{1 + \cos\varphi \cos\lambda} \end{aligned}\right\} \qquad (7\,\mathrm{b})$$

Aus der Gleichung für x ergiebt sich

$$\cos\varphi = \frac{x}{r \sin\lambda - x \cos\lambda},$$

dies in die Gleichung für y substituiert, liefert den Wert

$$\sin\varphi = \frac{y \sin\lambda}{r \sin\lambda - x \cos\lambda},$$

folglich die Gleichung der Meridiane:

$$\left(\frac{x}{r \sin\lambda - x \cos\lambda}\right)^2 + \left(\frac{y \sin\lambda}{r \sin\lambda - x \cos\lambda}\right)^2 = 1$$

oder geordnet:

$$x^2 + y^2 + 2rx \cot\lambda = r^2,$$

welche Gleichung, wenn man beiderseits $r^2 \cot\lambda^2$ addiert, die Form annimmt:

$$(x + r \cot\lambda)^2 + y^2 = r^2 \operatorname{cosec}\lambda^2 \qquad (10\,\mathrm{b})$$

Die Mittelpunkte der die Meridiane darstellenden Kreise liegen also in der X-axe (dem Äquator der Karte) in der Entfernung $-r\cot\lambda$ vom Kartenmittelpunkte, und haben die Halbmesser $r \operatorname{cosec}\lambda$.

Aus der Gleichung für y folgt:

$$\cos\lambda = \frac{r \sin\varphi - y}{y \cos\varphi}$$

und mit diesem Werte von $\cos\lambda$ giebt die Gleichung für x

$$\sin\lambda = \frac{x \sin\varphi}{y \cos\varphi},$$

folglich

$$\left(\frac{r \sin \varphi - y}{y \cos \varphi}\right)^2 + \left(\frac{x \sin \varphi}{y \cos \varphi}\right)^2 = 1$$

oder geordnet

$$x^2 + y^2 - \frac{2yr}{\sin \varphi} + r^2 = 0$$

als Gleichung der Parallelkreise, welche Gleichung durch beiderseitige Addition von $r^2 \operatorname{cosec} \varphi^2$ übergeht in

$$x^2 + (y - r \operatorname{cosec} \varphi)^2 = r^2 \cot \varphi^2. \tag{11 b}$$

Die Mittelpunkte der die Parallelkreise darstellenden Kreise liegen also in der Y-axe (dem ersten Meridiane) u. zw. im Abstande $r \operatorname{cosec} \varphi$ vom Mittelpunkte der Karte, und haben die Halbmesser $r \cot \varphi$.

Behufs der Construktion stelle K (Fig. 10) den Schnitt der Projektionsebene mit der Kugel vor, also BC die Projektion des Äquators, PP_1 die Projektion des ersten Meridians.

Legt man den Äquator in die Projektionsebene um, so kömmt das Projektionscentrum nach (O), der Mittelpunkt des darzustellenden Flächentheiles nach (A).

Ist nun $(A)O'(M) = \lambda$, so ist (M) die Umlegung desjenigen Punktes des Äquators, dessen Länge λ ist, $(M)(O)$ der zugehörige Projektionsstrahl, M' die stereographische Projektion dieses Punktes, und der durch $PM'P_1$ gelegte Kreis das Bild des Meridians von der Länge λ. Der Mittelpunkt o wird auf elementarem Wege gefunden, indem

$$Pm = mM'$$
$$om \perp PM'$$

gemacht wird.

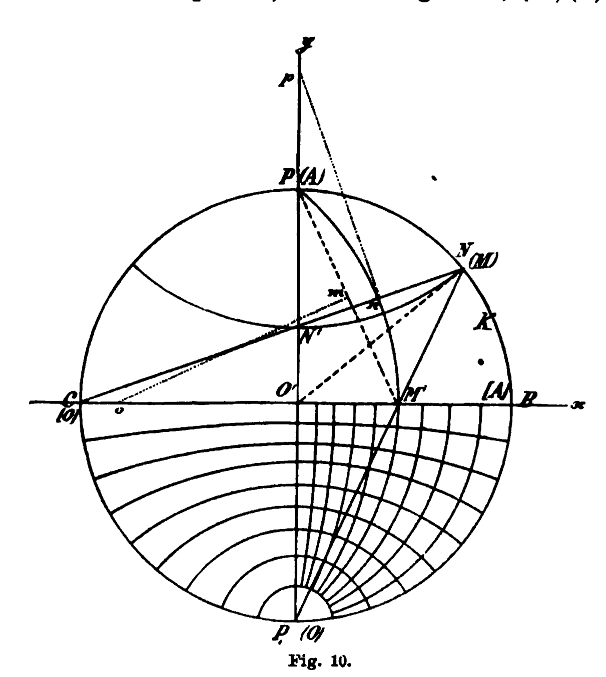


Fig. 10.

Um die Projektion der Parallelkreise zu erhalten, haben wir zunächst zu erwägen, dass, wenn $BO'N = \varphi$ ist, N der in dem Meridiane PB liegende Punkt des Parallels von der Breite φ, also auch dessen Projektion ist, weil der Meridian K in der Projektionsebene

liegt. Denkt man sich weiter den Meridian PAP_1 in die Zeichnungsfläche umgelegt, so dass das Auge nach $[O]$, der Kartenmittelpunkt nach $[A]$ kömmt, so ist N gleichzeitig die Umlegung des im Meridiane PAP_1 liegenden Punktes des Parallels, also $NN'[O]$ der umgelegte Projektionsstrahl, N' die stereographische Projektion dieses Punktes, und der durch N und N' gelegte Kreis, dessen Mittelpunkt in $O'P$, ist das Bild des Parallelkreises. Macht man wieder

$$Nn = nN'; \quad np \perp NN',$$

so ist p der Mittelpunkt des Parallels der Karte. In Fig. 10 ist ein Quadrant mit dem Gradnetze in dieser Projektion dargestellt.

Es war $(A)O'M = \lambda$ gemacht; daher $PP_1(M) = \frac{\lambda}{2} = M'PO' = moM'$ folglich

$$O'M' = r \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2}$$

$$mM' = \frac{1}{2} PM' = \frac{1}{2} r \sec \frac{\lambda}{2}$$

$$oM' = mM' \operatorname{cosec} moM' = \frac{1}{2} r \sec \frac{\lambda}{2} \operatorname{cosec} \frac{\lambda}{2} = \frac{r}{\sin \lambda} = r \operatorname{cosec} \lambda$$

$$oO' = oM' - O'M' = \frac{r}{\sin \lambda} - r \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} = \frac{r}{\sin \lambda} - r \cdot \frac{2 \sin \frac{\lambda}{2}^2}{2 \sin \frac{\lambda}{2} \cos \frac{\lambda}{2}}$$

$$= \frac{r}{\sin \lambda}\left(1 - 2 \sin \frac{\lambda}{2}^2\right) = r \cot \lambda,$$

übereinstimmend mit den aus den Gleichungen gefolgerten Werten.

Ferner

$$NO'x = \varphi, \text{ daher } NCx = \frac{\varphi}{2} = npN'$$

$$O'N' = r \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

$$NC = 2 O'C \cos O'CN = 2r \cos \frac{\varphi}{2}$$

$$CN' = O'C \sec O'CN = r \sec \frac{\varphi}{2},$$

daher

$$NN' = CN - CN' = r\left(2 \cos \frac{\varphi}{2} - \sec \frac{\varphi}{2}\right) = r \sec \frac{\varphi}{2}\left(2 \cos \frac{\varphi}{2}^2 - 1\right)$$

$$= r \cos \varphi \sec \frac{\varphi}{2}$$

$$N'p = N'n \operatorname{cosec} N'pn = \frac{1}{2} NN' \operatorname{cosec} \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} r \cos \varphi \sec \frac{\varphi}{2} \operatorname{cosec} \frac{\varphi}{2}$$

$$= r \cot \varphi$$

$$O'p = O'N' + N'p = r\left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \cot \varphi\right) = r\left[\frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} + \frac{\cos \frac{\varphi}{2}^2 - \sin \frac{\varphi}{2}^2}{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}\right] = \frac{r}{\sin \varphi}.$$

Eine Tafel für die cosec und cot zu geben ist wol unnötig, da die Construktion ebenso genau ist, wie das Entnehmen der Längen

von einem Massstabe und sich übrigens Tafeln für die Winkelfunktionen in vielen Tabellenwerken finden.

13. *c*) Die **stereographische Horizontalprojektion.** Die rechtwinkligen Coordinaten drücken sich als Funktionen von φ und λ durch die Gleichungen (7) aus; befreit man von Nennern und ordnet nach den als Unbekannte zu betrachtenden Grössen $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} &x \sin\beta \, . \, \sin\varphi + (x\cos\beta\cos\lambda - r\sin\lambda)\cos\varphi + x = 0 \\ &(y\sin\beta - r\cos\beta)\sin\varphi + (y\cos\beta\cos\lambda + r\sin\beta\cos\lambda)\cos\varphi + y = 0. \end{aligned} \quad \text{(a)}$$

Multipliciert man die erste der Gleichungen (a) mit

$$y\cos\beta\cos\lambda + r\sin\beta\cos\lambda,$$

die zweite mit

$$-(x\cos\beta\cos\lambda - r\sin\lambda)$$

und addiert, so erhält man

$$\sin\varphi = \frac{x\sin\beta\cos\lambda + y\sin\lambda}{r\cos\beta\sin\lambda - x\cos\lambda - y\sin\beta\sin\lambda}.$$

Multipliciert man die erste mit $(y\sin\beta - r\cos\beta)$ die zweite mit $-x\sin\beta$ und addiert, so folgt:

$$\cos\varphi = \frac{x\cos\beta}{r\cos\beta\sin\lambda - x\cos\lambda - y\sin\beta\sin\lambda};$$

demnach, wenn man die Ausdrücke für $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ quadriert und addiert:

$$\begin{aligned} &(x\sin\beta\cos\lambda + y\sin\lambda)^2 + (x\cos\beta)^2 \\ &= (r\cos\beta\sin\lambda - x\cos\lambda - y\sin\beta\sin\lambda)^2 \end{aligned}$$

oder entwickelt und geordnet:

$$x^2 + y^2 + 2rx\cot\lambda\sec\beta + 2ry\operatorname{tg}\beta = r^2,$$

welche Gleichung man auch schreiben kann:

$$(x + r\cot\lambda\sec\beta)^2 + (y + r\operatorname{tg}\beta)^2 = r^2\sec\beta^2\operatorname{cosec}\lambda^2 \quad (10c)$$

als Gleichung der Meridiane.

Zur Elimination von λ hat man aus der Gleichung für y:

$$\cos\varphi\cos\lambda = \frac{r\cos\beta\sin\varphi - y - y\sin\beta\sin\varphi}{r\sin\beta + y\cos\beta};$$

dies in die Gleichung für x eingesetzt und nach $\sin\lambda$ aufgelöst, giebt

$$\cos\varphi\sin\lambda = \frac{x(\sin\beta + \sin\varphi)}{r\sin\beta + y\cos\beta},$$

folglich

$$\begin{aligned} &(r\cos\beta\sin\varphi - y - y\sin\beta\sin\varphi)^2 + x^2(\sin\beta + \sin\varphi)^2 \\ &= \cos\varphi^2 (r\sin\beta + y\cos\beta)^2. \end{aligned}$$

oder entwickelt und geordnet

$$\begin{aligned} &x^2(\sin\beta + \sin\varphi)^2 + y^2(\sin\beta + \sin\varphi)^2 - 2ry\cos\beta(\sin\beta + \sin\varphi) \\ &= r^2(\sin\beta^2\cos\varphi^2 - \cos\beta^2\sin\varphi^2). \end{aligned}$$

Dividiert man durch $(\sin\beta + \sin\varphi)^2$ und addiert beiderseits

$$\frac{r^2 \cos\beta^2}{(\sin\beta + \sin\varphi)^2},$$

so wird nach einer leichten Reduktion:

$$x^2 + \left(y - \frac{r\cos\beta}{\sin\beta + \sin\varphi}\right)^2 = \frac{r^2\cos\varphi^2}{(\sin\beta + \sin\varphi)^2} \qquad (11\text{c})$$

als Gleichung der Parallelkreise.

Sei, behufs Herstellung des Kartennetzes K Fig. 11 der Schnitt der Kugel mit der Projektionsebene, $A'y$ das Bild des ersten Meridians, senkrecht über A' das Auge O. Legen wir die Ebene des ersten Meridians um $A'y$ in die Zeichnungsfläche, so kömmt das Auge nach (O), der Mittelpunkt des darzustellenden Flächentheiles nach (A). Ist die geographische Breite dieses Punktes β, also die Poldistanz $90 - \beta$, und macht man $(A)A'(P) = 90 - \beta$, so wird $(P)(P_1)$ die umgelegte Erdaxe, $(Q)(Q_1)$ die Umlegung der Schnittlinie des Äquators mit dem ersten Meridian. Zieht man in der Umlegung die Projektionsstrahlen $(P)(O)$, $(P_1)(O)$ der Pole, so erhält man (im ersten Meridiane $A'y$) die Projektionen P', P'_1 der Pole. Die Ebene eines Parallelkreises und sein Tangentenkegel schneiden den ersten Meridian in einem Dreieck, dessen Umlegung $(m)(n)(s)$ ist. Die Projektion dieser Punkte, welche in dem ersten Meridian liegen, ergiebt sich durch Ziehen der Projektionsstrahlen $(O)(m)$, $(O)(n)$, $(O)(s)$ in $m'n's'$ und s' muss der Mittelpunkt, $m'n'$ ein Durchmesser des hiernach leicht zu verzeichnenden Parallelkreises der Karte sein.

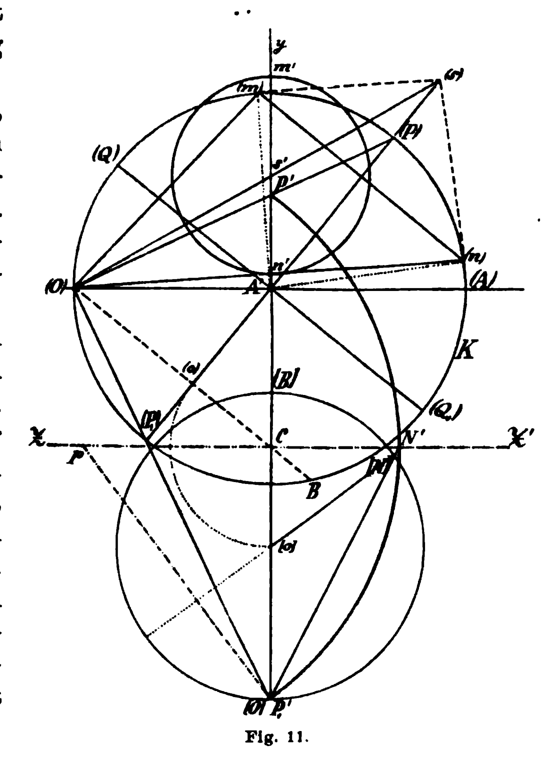


Fig. 11.

Die Meridiane der Karte gehen selbstverständlich durch P' und P'_1; um sie zu zeichnen, braucht man daher nur noch einen Punkt derselben, oder ihren Mittelpunkt. Letzterer ergiebt sich als Durchstosspunkt des vom Auge auf die Meridianebene gefällten Perpendikels; für alle Meridianebenen liegen die Perpendikel aber sämmtlich in einer

durch das Auge parallel zum Äquator gelegten Ebene, also im Parallelkreise des Auges; die Umlegung der Schnittlinie des letzteren mit der Ebene des ersten Meridians, $(O)B$, schneidet den ersten Meridian in C, welcher Punkt demzufolge ein Punkt der Schnittlinie der Ebene des durch das Auge gelegten Parallelkreises mit der Projektionsebene ist. Dieser Schnitt selbst ist daher die in C auf $A'y$ errichtete Senkrechte ZZ'. (Man hätte den Punkt C auch einfach als Halbierungspunkt von $P'P'_1$ erhalten.) Wir legen nun die Ebene des Parallels des Auges um ZZ' in die Projektionsebene um. Macht man also $C[o] = Co = C(o)$; $C[O] = CO = C(O)$, so wird $[o]$ der umgeklappte Mittelpunkt des fraglichen Parallels, $[O]$ der Ort des Auges in dem letzteren[1]), $[B]$ die Umlegung des im ersten Meridian liegenden Punktes desselben. Ist $[B][o][N] = \lambda$, so ist $[o][N]$ die Umlegung der Schnittlinie des Meridians von der Länge λ mit diesem, das von $[O]$ auf $[o][N]$ gefällte Perpendikel $[O]p$ die Umlegung der von O auf den Meridian von der Länge λ gefällten Perpendikels, p der Durchstosspunkt desselben mit der Projektionsebene, also der Mittelpunkt des Kartenmeridians. Die Construktion wird folglich sehr einfach. Will man die Meridiane z. B. von 10^0 zu 10^0 zeichnen, so theilt man den Kreis $[B][N][O]$ von 10^0 zu 10^0, und fällt von $[O]$ die Perpendikel auf die Radien der Theilpunkte; oder noch einfacher: Man zeichne um einen der beiden Pole, z. B. um P_1' einen Hilfskreis, theile diesen von P'_1A' aus von 10^0 zu 10^0; die Durchschnittspunkte der Theilungslinien mit ZZ' sind die Mittelpunkte der Kartenmeridiane. Letztere Construktion folgt auch aus dem Umstande, dass in der stereographischen Projektion die Winkel unverändert bleiben. Denkt man sich in P'_1 an die Bilder zweier Meridiane von der Längendifferenz λ die Tangenten gezogen, so müssen diese aus dem angeführten Grunde ebenfalls den Winkel λ einschliessen, demnach auch die Normalen, also die Verbindungslinien von P_1' mit den beiden Mittelpunkten p', p''. Da übrigens $[N][O]$ die Umlegung des Projektionsstrahles von N ist, so ist nothwendig N' der in ZZ' gelegene Punkt des Meridians. Obzwar die Construktion dieses Netzes wol sehr einfach ist, so wird es doch für diejenigen Parallelkreise und Meridiane, deren Mittelpunkte weiter vom Kartenmittelpunkte wegfallen, besser, die Lage derselben durch Rechnung zu bestimmen, da wegen der schiefen Schnitte eine genaue Bestimmung derselben durch Construktion nicht leicht möglich ist.

Für den Meridian von der Länge λ sind die Coordinaten des Mittelpunktes nach Formel (10c)

$$x = -r \cot \lambda \sec \beta \,;\, y = -r \operatorname{tg} \beta$$

1) Es ist zu bemerken, dass $[O]$ mit P_1' zusammenfallen muss, denn es ist $\sphericalangle(P)(O)(P_1) = P'OP_1' = 90^0$ als Winkel im Halbkreis, und da $P'C = P_1'C$, so muss auch $C(O) = P_1'C$ sein.

der Halbmesser

$$\varrho = r \sec\beta \operatorname{cosec}\lambda$$

für den Parallelkreis der Breite φ sind diese Grössen nach Formel (11 c)

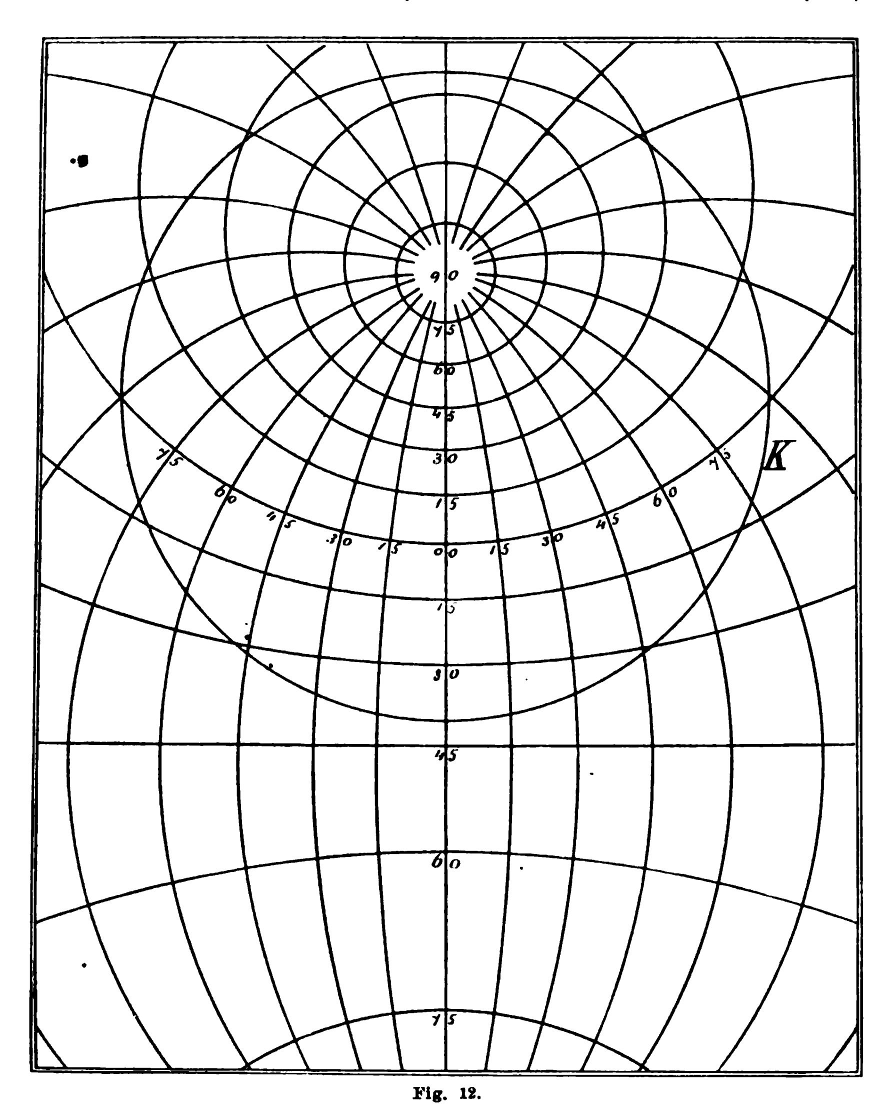


Fig. 12.

$$x = 0\,;\; y = + \frac{r\cos\beta}{\sin\beta + \sin\varphi}$$

$$\varrho = \frac{r\cos\varphi}{\sin\beta + \sin\varphi}.$$

Wir wollen auch hier die Identität des analytischen und geometrischen Resultates nachweisen:

Es ist

$$\sphericalangle\, AA'(n) = \varphi - \beta$$
$$AA'(m) = 180 - (\varphi + \beta)$$
$$A(O)n' = \frac{1}{2}(\varphi - \beta)$$
$$A(O)m' = 90 - \frac{1}{2}(\varphi + \beta)$$
$$A'n' = r \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi - \beta)$$
$$A'm' = r \cot \frac{1}{2}(\varphi + \beta)$$
$$n's' = \frac{1}{2}(A'm' - A'n')$$
$$A's' = \frac{1}{2}(A'm' + A'n')$$

folglich

$$n's' = \frac{1}{2} r \left[\cot \frac{1}{2}(\varphi + \beta) - \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi - \beta)\right]$$
$$A's' = \frac{1}{2} r \left[\cot \frac{1}{2}(\varphi + \beta) + \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi - \beta)\right]$$

oder, indem man auf gemeinschaftliche Nenner bringt, und reduciert:

$$n's' = \frac{r \cos \varphi}{\sin \beta + \sin \varphi}$$
$$A's' = \frac{r \cos \beta}{\sin \beta + \sin \varphi}.$$

Man hat ferner

$$\sphericalangle\, (P)A'(A) = 90 - \beta$$
$$P'(O)A' = 45 - \frac{\beta}{2}$$
$$A'P' = r \operatorname{tg}\left(45 - \frac{\beta}{2}\right)$$
$$A'P_1' = r \cot\left(45 - \frac{\beta}{2}\right)$$
$$A'C = \frac{1}{2}(A'P'_1 - A'P') = r \operatorname{tg} \beta$$
$$P_1'C = \frac{1}{2}(A'P_1' + A'P') = r \sec \beta$$
$$\sphericalangle\, CP_1'p = 90 - C[o]N' = 90 - \lambda,$$

also

$$Cp = CP_1' \cot \lambda = r \sec \beta \cot \lambda$$

Fig. 12 zeigt das Netz in dieser Projektionsmethode; der innerhalb des Kreises K gelegene Theil stellt die eine Halbkugel, der ausserhalb gelegene die andere Halbkugel dar. Zum Schlusse soll noch die Aufgabe gelöst werden: Gegeben die stereographischen Projektionen zweier Punkte; zu suchen ihren sphärischen Abstand.

Sei (Fig. 13) K der Schnitt der Kugel mit der durch ihren Mittel-

punkt gelegten Projektionsebene, wodurch der Massstab der Projektion bestimmt ist. Um den Abstand zweier Punkte, deren stereographische Projektionen C', D' sind, zu finden, suchen wir zunächst den Abstand der Bilder sowol als der durch sie dargestellten Punkte vom Augpunkte. Das Auge befindet sich senkrecht über oder unter der Zeichnungsfläche. Ob nun das Auge im Pol, im Äquator oder in irgend einem anderen Punkte liegt, werden immer Punkte der Projektionsebene, die in einem Kreise liegen, dessen Mittelpunkt A' ist, von A gleich weit entfernt sein, und dasselbe gilt von den Kugelpunkten, deren Bilder sie sind. Es ist also $AC' = AC'_1$; $AD' = AD'_1$ wenn $A'C' = A'C'_1$; $A'D' = A'D'_1$ ist, und ebenso $AC = AC_1$; $AD = AD_1$, wenn C, D die den Projektionen C', D' entsprechenden Punkte der Kugel sind. Legt man nun die Ebene $AC_1'D_1'$ in die Zeichnungsfläche um, so dass A nach (A) kömmt, so sind die gesuchten Entfernungen $(A)C'_1$; $(A)D'_1$; $(A)C_1$; $(A)D_1$. Nun denken wir uns das Dreieck $AC'D'$ um $C'D'$ in die Zeichnungsfläche gedreht; indem man mit den Seiten $[A]C' = (A)C'_1$; $[A]D' = (A)D'_1$ das Dreieck $[A]C'D'$ construiert. Macht man nun $[A]C = (A)C_1$; $[A](D) = (A)D_1$ so, sind (D), (C) die umgelegten Kugelpunkte, und $(D)(C)$ die zu diesen beiden Punkten gehörige Sehne. Diese, als zu dem durch die beiden Punkte C und D gehenden grössten Kreise, der im allgemeinen nicht durch A gehen wird, gehörig, entspricht einem Centriwinkel, den man construieren kann, indem man die Sehne $(C)(D)$ auf dem grössten Kreise K irgend wo z. B. in BM aufträgt; $BA'M$ ist der sphärische Abstand von CD.

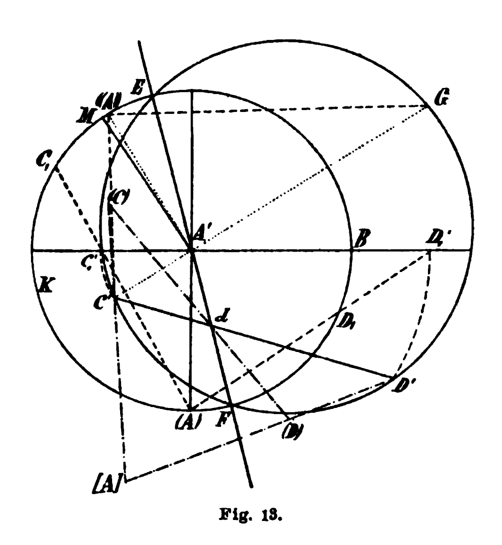


Fig. 13.

Der Schnittpunkt d von $(C)(D)$ mit $C'D'$ ist der Durchstosspunkt von CD mit der Projektionsebene; denn da er in der Umdrehungsaxe $C'D'$ liegt, so bleibt er bei der Drehung fest; er gehört daher auch der Ebene $A'CD$ des durch C und D gehenden grössten Kreises an; demnach ist $A'd$ die Spur dieser Ebene; die Schnittpunkte von $A'd$ mit dem in der Projektionsebene liegenden Kreise K der Kugel sind folglich Punkte des durch C und D gehenden grössten Kreises, und da sie in der Projektionsebene selbst liegen, gleichzeitig ihre

Projektionen; die Projektion dieses grössten Kreises geht daher durch $EFC'D'$ und ist daher leicht zu zeichnen.[1])

Hieraus folgt auch, dass das Bild irgend eines *grössten* Kreises der Kugel den Kreis K in zwei diametral gegenüber liegenden Punkten EF des letzteren schneidet, und dass nur *solche* Kreise, für welche diese Bedingung erfüllt ist, Bilder von grössten Kugelkreisen sind (s. *E. Reusch*, die stereographische Projektion, pag. 11.)

Bei allen stereographischen Projektionen ist die Vergrösserung in der Entfernung v vom Kartenmittelpunkte (also für die stereographische Polarprojektion für die Poldistanz v)

$$k = \frac{1}{2 \cos \frac{1}{2} v^2}$$

und die Flächenvergrösserung

$$K = \frac{1}{4 \cos \frac{1}{2} v^4}.$$

Um jedoch einen vergleichbaren Massstab zu erhalten, wollen wir im folgenden stets die Vergrösserung im Kartenmittelpunkte gleich 1 setzen, also die relative Vergrösserung gegenüber derjenigen der Kartenmitte suchen; (bei den perspektivischen Projektionen kömmt diess darauf hinaus, die Projektionsebene parallel zu verschieben, und zwar im vorliegenden Falle, bis sie die Kugel berührt.) Im oben angegebenen Massstabe ist für die Kartenmitte

$$k_0 = \tfrac{1}{2}, \; K_0 = \tfrac{1}{4}$$

folglich

$$k_1 = \frac{k}{k_0} = \frac{1}{\cos \frac{1}{2} v^2};$$

$$K_1 = \frac{K}{K_0} = \frac{1}{\cos \frac{1}{2} v^4}$$

und dieses sind die Werte der Vergrösserungen, wie sie bei der stereographischen Projektion auftreten, wenn die Projektionsebene die Kugel berührt.

Tafel 3 giebt nebst den Werten von ϱ diese Werte von k und K von 10^0 zu 10^0 in den ersten drei Columnen; wie schon früher erwähnt

1) Diese Lösung so wie eine andere, minder einfache findet sich in *Puissant*, traité de topographie Paris 1820. pag. 92. Handelt es sich nur um die Construktion des Bildes des durch C und D gehenden grössten Kreises, so kann man einen einfacheren Weg wählen; der durch die Punkte C und D gehende grösste Kreis muss offenbar auch durch ihre Antipodenpunkte gehen; um denjenigen von C zu finden, legen wir die Ebene des grössten Kreises $AA'C$ um $A'C$ um, so dass A nach $((A))$ kömmt; das auf $((A))C'$ gezogene Perpendikel $((A))G'$ bestimmt, wie man leicht sieht, auf dem Durchmesser $A'C'$ das Bild G' des Antipodenpunktes (weil der Winkel CAG als Winkel im Halbkreise ein Rechter ist) und das Bild des durch CD gehenden grössten Kreises geht durch $C'D'G'$; Hierüber s. auch *Gretschel*, Lehrbuch der Kartenprojektionen, pag. 68.

ist hier der Winkel δ (das Maximum der Winkeländerung) gleich Null, was ein bedeutender Vortheil dieser Projektionsart ist; ausserdem hat sie den bedeutenden Vorzug, dass die Netzlinien sämmtlich Kreise, also äusserst leicht zu verzeichnen sind. Allein da die Vergrösserungen an den verschiedenen Punkten der Karte ziemlich stark variieren, so wird sie trotz der genannten Vorzüge nur wenig, hauptsächlich zu Planiglobien, verwendet; denn für die Darstellung kleinerer Ländercomplexe hat man bessere Projektionen.

3. Centrale oder gnomonische Projektion.[1])

14. Das Auge befindet sich im Centrum der Kugel; die Projektionsebene soll die Tangentialebene im Mittelpunkt des darzustellenden Flächentheiles sein. Dann ist $a = 0$, $D = r$ und die Gleichungen I, II, III werden:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{r \sin \lambda \cos \varphi}{\sin \beta \sin \varphi + \cos \beta \cos \varphi \cos \lambda} \\ y &= \frac{r (\cos \beta \sin \varphi - \sin \beta \cos \varphi \cos \lambda)}{\sin \beta \sin \varphi + \cos \beta \cos \varphi \cos \lambda} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{\cos v^2} \\ k_2 &= \frac{1}{\cos v} \qquad K = \frac{1}{\cos v^3} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \omega' &= \cos v \operatorname{tg} \omega \\ \sin \frac{\delta}{2} &= \operatorname{tg} \frac{v^2}{2} \end{aligned}\right\}. \tag{14}$$

1) *S. Günther* (Geographisches Jahrbuch v. Behm 1882 Bd. 9) giebt an, dass dieselbe nach *d'Avezac* von *Thales* herrühren solle. Ich finde jedoch in *d'Avezac* (Coup d'oeuil historique sur la projection des cartes de géographie in dem Bulletin de la Société de géographie de Paris 1863), dass *Anaximander*, Schüler von *Thales* die erste Karte gezeichnet haben soll, von der wir aber *gar nichts* wissen (s. auch *Barbier-Dubocage* Notices historiques sur la construction des cartes géographiques im Mémorial du dépot de la guerre. Paris. Bd. I.) Dasselbe behauptet d'*Avezac* von der Karte des *Dikaearchos*: „mais qui nous dira, sur quelle projection elle (la carte) était assise? et suffit-il de savoir, qu'elle était traversé d'ouest en est en son milieu par un diaphragme ou ligne séparative courant depuis les colonnes d'Hercule à travers la Sicile, Rhodes et le Taurus oriental, jusqu'aux derniers hauteurs d'Imaüs? Non ce n'est point encore assez pour conclure.“ (l. c. pag. 269). Von dieser Karte jedoch behauptet *Le Monnier* („Zur Geschichte der Kartographie“ in der „Deutschen Rundschau für Geographie und Statistik,“ 1879) dass sie im Atlas zur Histoire de la Géographie von *Vivien de St. Martin* erhalten sei. Nach *Barbier-Dubocage* und *d'Avezac* schwinden die Zweifel erst mit *Eratosthenes*, doch ist die von ihm construirte Karte eine Plattkarte (s. § 24.) Die perspektivischen Projektionen sollen nach *d'Avezac* sämmtlich von *Hipparch* herrühren, obzwar dies für die orthographische Prorektion nicht ganz sicher, obgleich unendlich wahrscheinlich (infiniment probable) ist (l. c. pag. 275 und 323).

15. *a*) Die **centrale Polarprojektion**. Für diese ist $\beta = 90^0$ und die Gleichungen werden

$$\left.\begin{aligned} x &= r \sin \lambda \cot \varphi \\ y &= -r \cos \lambda \cot \varphi \end{aligned}\right\} \quad (12\,\text{a}).$$

Hieraus erhält man durch Elimination von φ als Gleichung der Meridiane

$$y = -x \cot \lambda \quad (15\,\text{a})$$

und durch Elimination von λ als Gleichung der Parallelkreise

$$x^2 + y^2 = r^2 \cot \varphi^2 \quad (16\,\text{a}).$$

Die Herstellung des Kartennetzes ist hier sehr einfach. Sei A (Fig. 14) der Mittelpunkt der Karte, so wird die Projektionsebene von der Kugel in diesem Punkte berührt und das Auge im Mittelpunkte der Kugel senkrecht unter der Zeichnungsfläche liegen. Sei Ay das Bild des ersten Meridians, und dreht man denselben um diese Gerade in die Projektionsebene herauf, so dass er nach K kömmt, so wird der in ihm gelegene Punkt von der Breite φ nach (M) kommen, wenn $A(O)(M) = 90 - \varphi$ ist; $(M)(O)$ ist sein Projektionsstrahl, daher M' seine Projektion; da nun die Projektionen aller in einem Parallelkreise gelegener Punkte in einem Kreise liegen, dessen Centrum A ist,

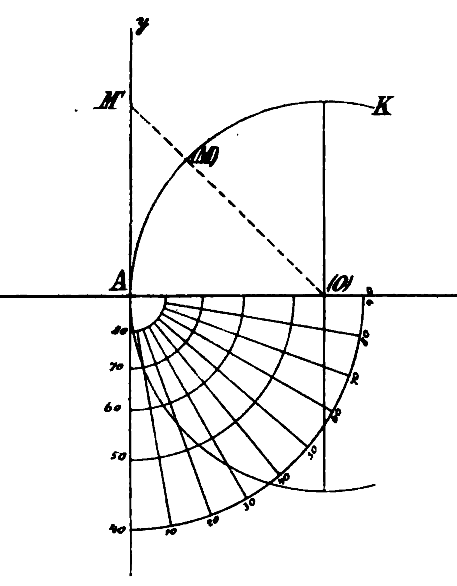


Fig. 14.

weil die Ebenen der Parallelkreise zur Projektionsebene parallel sind, so ist der aus A mit dem Halbmesser AM' beschriebene Kreis das Bild des Parallelkreises von der Breite φ. Hiernach ist die Construktion des Systems der Parallelen die folgende; man hat den Quadranten AK etwa von 10^0 zu 10^0 zu theilen, die Schnittpunkte der Radien mit Ay geben Punkte der entsprechenden Parallelkreise. Es ist selbstverständlich, dass man nur eine Hemisphäre darstellen kann, und auch diese nicht bis zum Äquator, dessen Bild ganz ins unendliche fällt.

Da die Neigungswinkel der Meridianebenen durch ihre Schnitte mit der Tangentialebene im Pole gemessen werden, diese Schnitte aber gleichzeitig die Centralprojektionen der Meridiane sind, so hat man als Bild eines Meridians von der Länge λ eine Gerade aufzufassen, die mit der negativen Y-axe den Winkel λ einschliesst; für diese Gerade hat man

$$y = - x \cot \lambda$$

wie es die analytische Discussion lieferte. Der Halbmesser des Parallels von der Breite φ ist $AM' = (O)A \operatorname{tg}(M)(O)A = r \cot \varphi$.

16. *b*) **Die centrale Äquatorealprojektion.** Es ist $\beta = 0$, und man erhält

$$\left. \begin{aligned} x &= r \operatorname{tg} \lambda \\ y &= r \operatorname{tg} \varphi \sec \lambda \end{aligned} \right\}, \tag{12b}$$

folglich

$$x = \operatorname{tg} \lambda \tag{15b}$$

als Gleichung der Meridiane; und da

$$\cos \lambda = \frac{r \operatorname{tg} \varphi}{y}; \ \sin \lambda = \frac{x}{y} \operatorname{tg} \varphi,$$

so wird die Gleichung der Parallelkreise

$$\frac{x^2}{y^2} \operatorname{tg} \varphi^2 + \frac{r^2}{y^2} \operatorname{tg} \varphi^2 = 1$$

oder

$$\frac{y^2}{r^2 \operatorname{tg} \varphi^2} - \frac{x^2}{r^2} = 1 \tag{16b}$$

Die Meridiane sind demnach gerade Linien parallel zur Y-axe in der Entfernung $r \operatorname{tg} \lambda$; die Parallelkreise sind Hyperbeln, deren Mittelpunkte in den Mittelpunkt der Karte fallen, und für welche die reelle Axe in der Richtung der y gleich $r \operatorname{tg} \varphi$, die imaginäre in der Richtung der x gleich r ist.

Sei für die Zeichnung (Fig. 15) A' der Kartenmittelpunkt, $A'y$ der erste Meridian der Karte, XX' der Äquator derselben. Um das Bild eines Meridians zu erhalten, hat man den Radius des der Länge desselben entsprechenden Punktes des Äquators bis zum Schnitte mit der Projektionsebene, also bis XX' zu verlängern; dies thun wir wieder in der Umlegung indem wir $A'(O)(M) = \lambda$ machen und $(O)(M)$ bis zum Schnitte M' mit XX' verlängern, die in M' parallel zu $A'y$ gezogene Gerade stellt den Meridian der Länge λ vor; es folgt übrigens aus der Construktion

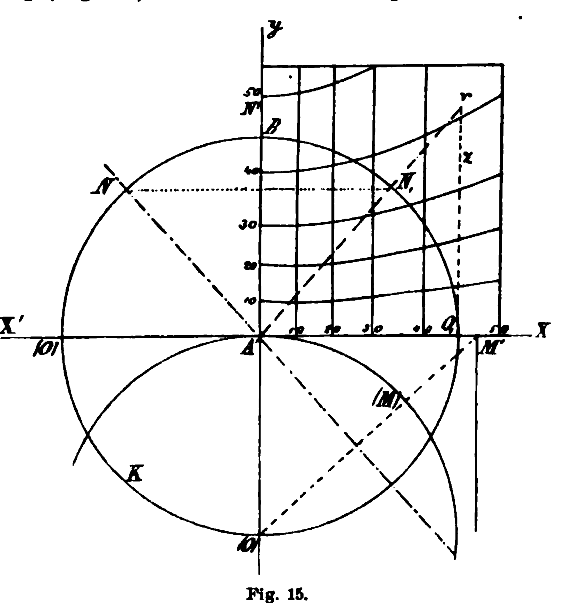


Fig. 15.

$$A'M' = r \operatorname{tg} \lambda$$

wie auch oben gefunden wurde. Um die Bilder der Parallelkreise zu construieren, wird man durch letztere die projicierenden Kegel legen, und da von der Projektionsebene immer beide Theile derselben u. z. symmetrisch geschnitten werden, so werden die Projektionen Hyperbeln sein, welche symmetrisch zur XX' liegen. Die Asymptoten einer solchen Hyperbel sind bekanntlich parallel zu den Schnittlinien des Kegels mit der durch die Spitze des Kegels parallel zur schneidenden Ebene gelegten Ebene. Statt dessen verschieben wir die Kugel, bis ihr Mittelpunkt in die Projektionsebene fällt; der Schnitt mit der Projektionsebene ist dann der Kreis K selbst, die Ebene des Parallelkreises von der Breite φ schneidet in NN_1, wenn $N_1AX = \varphi$ ist, und der Schnitt des Projektionskegels ist $NA'N_1$; daher sind NA', N_1A die Asymptoten des fraglichen Parallels. Die Schnittpunkte desselben mit der Y-axe erhält man sehr leicht, wenn man sich den die Projektionsebene in A' berührenden Meridian um $A'y$ umgelegt denkt. Das Projektionscentrum kömmt dann nach $[O]$ und die projicierende Gerade für den Punkt des Meridians von der Breite φ kömmt in einen Abstand $A'N' = O_1v$. Hieraus folgt nun die folgende Construktion für die Parallelen: Man theile den Kreis $O_1B[O]$ etwa von 10^0 zu 10^0; die Radien der einzelnen Theilpunkte geben die Asymptoten und die durch den Schnittpunkt der letzteren mit O_1z zu $A'x$ gezogenen Parallelen bestimmen auf $A'B$ die Endpunkte der reellen Axen; die Länge der letzteren ist $2A'N' = 2A'O_1 \operatorname{tg}\varphi = 2r\operatorname{tg}\varphi$, und da allgemein für die Halbaxen a, b, der Asymptotenwinkel ω bestimmt ist durch

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \frac{b}{a},$$

so wird hier

$$b = r\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}N_1A'Y = r\operatorname{tg}\varphi\cot\varphi = r.$$

In Fig. 15 ist ein Quadrant des Netzes eingezeichnet.

17. *c*) **Centrale Horizontalprojektion.** Für diese gelten die allgemeinen Gleichungen (12); wir schreiben dieselben in der Form

$$x = \frac{r\sin\lambda}{\sin\beta\operatorname{tg}\varphi + \cos\beta\cos\lambda}; \quad y = \frac{r(\cos\beta\operatorname{tg}\varphi - \sin\beta\cos\lambda)}{\sin\beta\operatorname{tg}\varphi + \cos\beta\cos\lambda},$$

woraus man erhält

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{r\sin\lambda - x\cos\beta\cos\lambda}{x\sin\beta} = \frac{y\cos\beta\cos\lambda + r\sin\beta\cos\lambda}{r\cos\beta - y\sin\beta}$$

und von Nennern befreit und geordnet:

$$x\cot\lambda + y\sin\beta = r\cos\beta \tag{15c}$$

als Gleichung der Meridiane. Für $x = 0$, wird $y = r\cot\beta$
für $y = 0$ wird $x = r\cos\beta\operatorname{tg}\lambda$.

Die Meridiane der Karte sind demnach gerade Linien, die die Y-axe (den ersten Meridian) in der *constanten* Entfernung $r\cot\beta$ schneiden,

wo daher das Bild des Poles sein muss; die X-axe wird in der Entfernung $r \cos\beta \operatorname{tg}\lambda$ geschnitten. Aus der Gleichung für y folgt:

$$\cot\varphi \cos\lambda = \frac{r\cos\beta - y\sin\beta}{y\cos\beta + r\sin\beta},$$

und dieses in die Gleichung für x eingesetzt, giebt

$$\cot\varphi \sin\lambda = \frac{x}{y\cos\beta + r\sin\beta},$$

folglich als Gleichung der Parallelkreise

$$\left(\frac{r\cos\beta - y\sin\beta}{y\cos\beta + r\sin\beta}\right)^2 + \left(\frac{x}{y\cos\beta + r\sin\beta}\right)^2 = \cot\varphi^2$$

oder entwickelt und gehörig geordnet:

$$x^2 + y^2(\sin\beta^2 - \cos\beta^2\cot\varphi^2) - 2ry\sin\beta\cos\beta\operatorname{cosec}\varphi^2$$
$$+ r^2(\cos\beta^2 - \sin\beta^2\cot\varphi^2) = 0. \qquad (m)$$

Addiert und substrahiert man hier

$$\frac{r^2\sin\beta^2\cos\beta^2\operatorname{cosec}\varphi^4}{\sin\beta^2 - \cos\beta^2\cot\varphi^2},$$

so ergiebt sich:

$$x^2 + \left[y - \frac{r\sin\beta\cos\beta\operatorname{cosec}\varphi^2}{\sin\beta^2 - \cos\beta^2\cot\varphi^2}\right]^2(\sin\beta^2 - \cos\beta^2\cot\varphi^2) = \frac{r^2\cot\varphi^2}{\sin\beta^2 - \cos\beta^2\cot\varphi^2}$$

oder

$$\frac{x^2}{\dfrac{r^2\cot\varphi^2}{\sin\beta^2 - \cos\beta^2\cot\varphi^2}} + \frac{\left(y - \dfrac{r\sin\beta\cos\beta\operatorname{cosec}\varphi^2}{\sin\beta^2 - \cos\beta^2\cot\varphi^2}\right)^2}{\dfrac{r^2\cot\varphi^2}{(\sin\beta^2 - \cos\beta^2\cot\varphi^2)^2}} = 1 \qquad (16c)$$

Die Parallelkreise sind demnach Kegelschnittslinien, deren Mittelpunkte auf der Y-axe in der Entfernung

$$\frac{r\sin\beta\cos\beta\operatorname{cosec}\varphi^2}{\sin\beta^2 - \cos\beta^2\cot\varphi^2}$$

liegen, deren eine Axe (in der Richtung der y) stets reell ist, und gleich

$$\frac{r\cot\varphi}{\sin\beta^2 - \cos\beta^2\cot\varphi^2};$$

die zweite Axe (in der Richtung der x) hat zum Ausdrucke

$$\frac{r\cot\varphi}{\sqrt{\sin\beta^2 - \cos\beta^2\cot\varphi^2}}.$$

Der Kegelschnitt wird demnach eine Ellipse, wenn

$$\sin\beta^2 > \cos\beta^2\cot\varphi^2$$

d. h. $\operatorname{tg}\beta^2 > \cot\varphi^2$, $\operatorname{tg}\beta > \operatorname{tg}(90 - \varphi)$; $\varphi > 90 - \beta$.

Der Kegelschnitt wird eine Hyperbel, deren Gleichung

$$\frac{\left(y + \dfrac{r\sin\beta\cos\beta\operatorname{cosec}\varphi^2}{\cos\beta^2\cot\varphi^2 - \sin\beta^2}\right)^2}{\dfrac{r^2\cot\varphi^2}{(\cos\beta^2\cot\varphi^2 - \sin\beta^2)^2}} - \frac{x^2}{\dfrac{r^2\cot\varphi^2}{\cos\beta^2\cot\varphi^2 - \sin\beta^2}} = 1$$

ist, wenn

$$\cot\varphi^2 > \operatorname{tg}\beta^2 \text{ oder } \varphi < 90 - \beta.$$

Wenn $\varphi = 90 - \beta$, so wird der Nenner unendlich; dann rückt aber auch der Mittelpunkt ins Unendliche und der Kegelschnitt wird eine Parabel. Da

$$\sin\beta^2 - \cos\beta^2 \cot\varphi^2 = 0,$$

so geht die Gleichung (m) über in

$$x^2 - 2\,ry \sin\beta \cos\beta \operatorname{cosec}\varphi^2 + r^2 (\cos\beta^2 - \sin\beta^2 \cot\varphi^2 + \sin\beta^2 - \cos\beta^2 \cot\varphi^2) = 0$$

oder

$$x^2 - 2ry \operatorname{tg}\beta + r^2 (1 - \operatorname{tg}\beta^2) = 0$$

$$x^2 = 2r \operatorname{tg}\beta \left[y - \frac{r}{2}\,\frac{1 - \operatorname{tg}\beta^2}{\operatorname{tg}\beta}\right] = 2r \operatorname{tg}\beta\,(y - r\cot 2\beta),$$

also die Gleichung des Parallels von der Poldistanz β

$$x^2 = 2r \operatorname{tg}\beta\,(y - r\cot 2\,\beta).$$

Der Scheitel der Parabel liegt hiernach um $r\cot 2\beta$ vom Mittelpunkt der Karte entfernt, ihr Parameter ist $2r\operatorname{tg}\beta$.

Um das Kartennetz zu zeichnen, sei A' (Fig. 16) der Mittelpunkt der Karte, $A'y$ der erste Meridian. Legen wir die Ebene desselben um $A'y$ in die Zeichnungsfläche, so kommt der Mittelpunkt der Kugel nach (O); die Schnittlinie der Ebene des Äquators mit derjenigen des ersten Meridians ist in der Umlegung $(Q)(Q_1)$, bestimmt durch den Winkel $A'(O)(Q_1)$ gleich der Breite β von A'; die Spur, also für die Centralprojektion auch das Bild der Äquatorebene auf der Projektionsebene geht durch den Schnittpunkt Q von $(Q)(Q_1)$ mit $A'y$ senkrecht auf dieser Geraden, ist also QZ_1. Die auf $(Q)(Q_1)$ senkrechte Gerade $(P)(P_1)$ ist die Umlegung der Polaraxe der Erde, ihr Schnitt P' mit $A'y$ demnach das Bild des Poles. Die Meridiane müssen sämmtlich durch P' gehen; um sie zu zeichnen, suchen wir die Bilder der Punkte, in denen die Meridiane den Äquator schneiden, und drehen diesen zu diesem Behufe um QZ_1 in die Zeichnungsfläche, so dass sein Mittelpunkt nach $[O]$ kömmt. Ist nun $[Q_1][O][M] = \lambda$, so ist $[M]$ die Umlegung des Punktes, in dem der Meridian von der Länge λ den Äquator schneidet, $[O][M]$ der umgelegte Projektionsstrahl, M' das Bild des Punktes M_1 und daher $P'M'$ das Bild des Meridians.

Für die Parallelkreise wird die Construktion verschieden jenachdem $\varphi \gtreqless 90 - \beta$ ist.

1) $\varphi > 90 - \beta$ oder $90 - \varphi < \beta$. Sei der Schnitt der Ebene dieses Parallelkreises mit der Ebene des Meridians in der Umlegung $(q)(q_1)$, so dass die Poldistanz $(P)(q) < \beta$ ist. Da, wenn $(O)z \perp (O)x$; $(P)(O)z = \beta$, so wird $(P)(q) < (P)z$, demnach schneiden alle Erzeugenden des projicierenden Kegels, nach derselben Seite verlängert, die Projektionsebene; der Schnitt wird eine Ellipse, welche symmetrisch gegen $A'y$ liegen wird, und deren grosse Axe in $A'y$ hineinfällt. Ihre Endpunkte ergeben sich, wenn man die Projektions-

strahlen $(O)(q)$, $(O)q_1$ bis zum Schnitte mit $A'y$ verlängert in $q'q'_1$; der Halbierungspunkt o' dieser Strecke ist der Mittelpunkt der Projektionsellipse, die in o' auf $A'y$ errichtete Senkrechte $o't$ ist die kleine Axe..

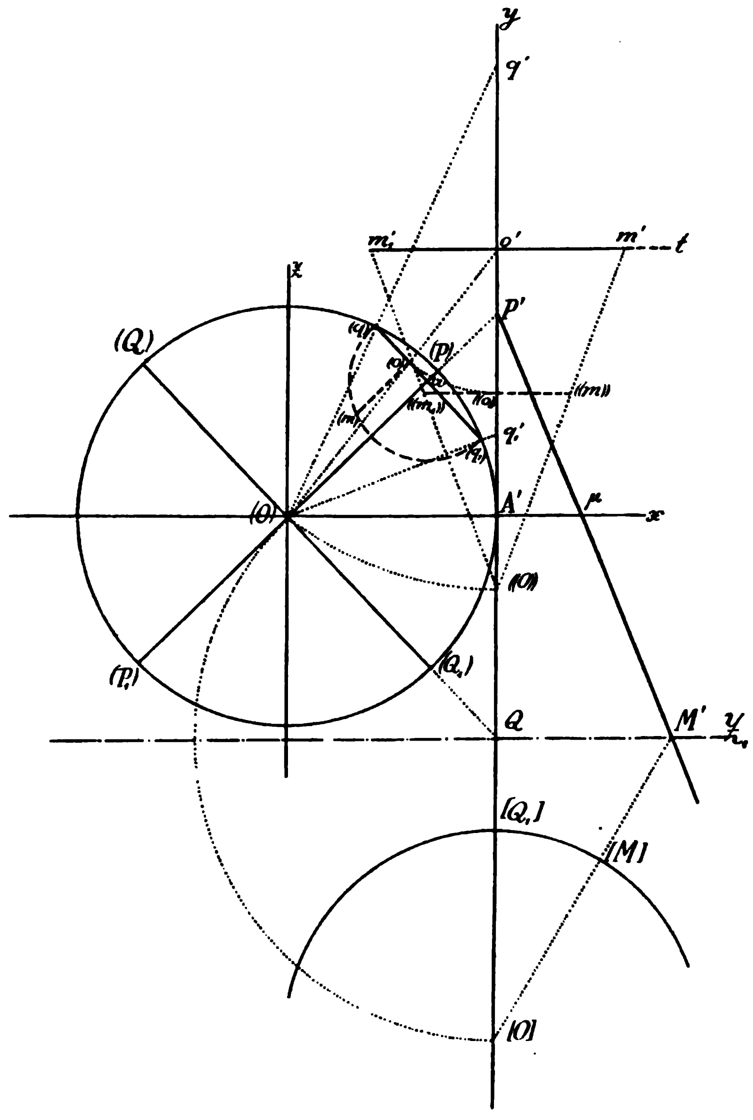


Fig. 16.

Um deren Länge zu finden, bemerken wir zunächst, dass o' die Projektion eines Punktes o des Durchmessers qq_1 ist, dessen Umlegung (o) ist; die kleine Halbaxe $o'm'$ ist die Projektion einer zur Projektionsebene parallelen Sehne om, welche zu qq_1 senkrecht steht und deren Länge daher gefunden wird, wenn man in der Umlegung den

über $q q_1$ gedachten Kreis nach $(q)(m)(q_1)$ herunterklappt, und die zum Punkte (o) gehörige Ordinate $(o)(m)$, welche mit jener Sehne identisch ist, zeichnet. Legt man jetzt das Dreieck $m m_1 O$ um $o't$ in die Zeichnungsfläche, so dass O nach $((O))$, o nach $((o))$ kömmt, so fallen die Endpunkte dieser Ordinate nach $((m))((m_1))$, wenn

$$((o))((m)) = (o)(m)$$

gemacht wird, und $((O))((m))$ ist die Umlegung des Projektionsstrahles daher m' der Endpunkt der kleinen Axe. Aus den beiden Axen $q'q_1'$ und $m'm_1'$ kann die Ellipse ohne Schwierigkeit construiert werden.

2) Sei $\varphi = 90 - \beta$ oder $90 - \varphi = \beta$ d. h. der Parallelkreis gehe durch z; die eine Erzeugende Oz des projicierenden Kegels Ozz_1 (Fig. 17) schneidet die Projektionsebene überhaupt nicht, also ist der Schnitt eine Parabel, deren Scheitel die Projektion z_1' von z_1, ihre Axe die Gerade $A'y$. Um die Parabel zu zeichnen wird es am besten sein, die Projektion noch eines Punktes derselben zu suchen. Der Bequemlichkeit halber wählen wir hierzu die Endpunkte des auf zz_1 senkrechten Durchmessers rs des Parallelkreises. Dreht man zu diesem Zwecke wieder die Ebene Ors um ihre Schnittlinie $P't$ in die Projektionsebene, so dass O nach $[O]$, o nach $[o]$ kömmt, so sind $[r][s]$ die Endpunkte des zu zeichnenden Durchmessers in der Umlegung, wenn $[o][r] = (o)z$ gemacht wird; $[O][r]$, $[O][s]$ die Projektionsstrahlen, daher $r's'$ die in $P't$ liegenden Projektionen dieser Punkte, also zwei Parabelpunkte. Die Construktion der Parabel hat hiernach keine Schwierigkeiten mehr. (Macht man $P'z_1' = z_1'a$, so ist ar' Tangente in r'; macht man ferner $\sphericalangle Fr'a = \sphericalangle r'ay$, so ist F der Brennpunkt der Parabel.)

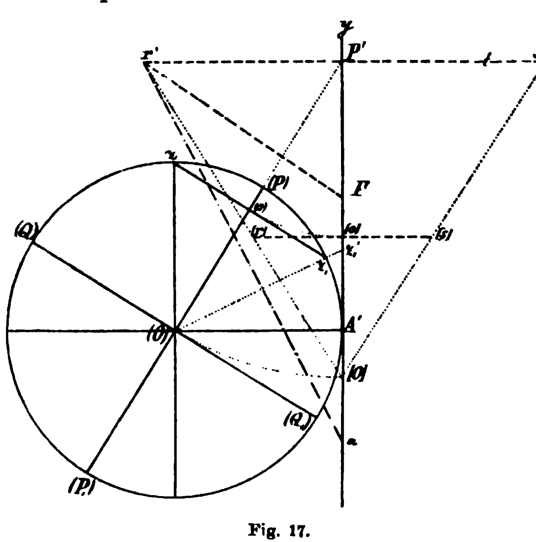


Fig. 17.

3) $\varphi < 90 - \beta$ oder $90 - \varphi > \beta$, d. h. (Fig. 18) $(P)(O)(p) > (P)(O)z$. Die Erzeugenden des projicierenden Kegels werden nur theilweise die Projektionsebene schneiden; ein Theil schneidet in der Rückverlängerung, die Projektion ist eine Hyperbel. Hiefür wird man am besten zuerst die reelle Axe und die Asymptoten zeichnen. Die Scheitel der Hyperbel sind die Schnittpunkte der Projicierenden $(O)(q)$, $(O)(p)$; sind dieselben p', q' und halbiert man die zwischen

ihnen enthaltene Strecke, so erhält man in o' den Mittelpunkt der Hyperbel. Denken wir uns nun eine Orthogonalprojektion der Kugel und des projicierenden Kegels auf die Ebene des ersten Meridians. Die durch O zur Projektionsebene parallele Ebene schneidet die Ebene des ersten Meridians in einer Geraden, deren Umlegung $(O)z$ ist. Der Kegel wird von dieser Ebene in zwei Erzeugenden geschnitten, denen parallel die Asymptoten der Hyperbel sind, und deren Orthogonalprojektionen mit Oz zusammenfallen; denkt man sich daher über $(p)(q)$ den Parallelkreis, senkrecht zur Zeichnungsfläche construiert, und dessen Ordinate in (r) gezeichnet, deren Länge offenbar $(s)(r)$ ist, und das Dreieck $(O)(r)s$ um $(O)(r)$ in die Zeichnungsfläche gedreht, nach $(O)(r)[s]$, so muss

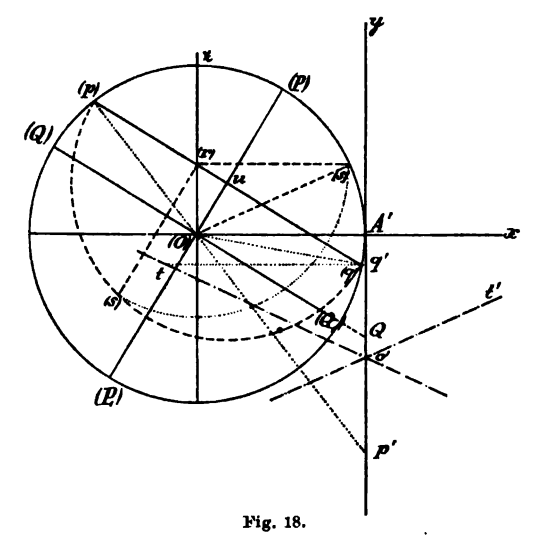


Fig. 18.

dieses letztere Dreieck dem über A' im Raume liegenden Ors congruent sein und da $(O)(r) \parallel A'y$ ist, so ist die eine Asymptote $o't'$ parallel $O[s]$, die andere symmetrisch dazu auf der anderen Seite von $A'y$ gelegen; die durch q' senkrecht auf $A'y$ gezogene Gerade bestimmt auf der Asymptote einen Punkt t so, dass $q't$ gleich der imaginären Halbaxe der Hyperbel ist, deren weitere Construktion daher keine Schwierigkeiten findet.

Übrigens ist die Construktion des Halbkreises $(p)(s)(q)$, der Linie $(r)s$, und des Kreisbogens $(s)[s]$ überflüssig; denn denkt man sich über $(p)(q)$ die Ebene E_1 des Parallels und eine zu $(O)z$ senkrechte Ebene E_2, so schneiden sich beide in der Geraden $(r)s$ und die um (O) gezeichnet gedachte Kugel wird von dieser Geraden in dem Punkte s getroffen, der auch dem Schnittkreise von E_2 mit der Kugel angehört, demzufolge $(r)[s]$ gleich sein muss $(r)s$. Für die Zeichnung der gesuchten Hyperbel hat man daher, nachdem die Punkte p', q', o' bestimmt sind, nur durch den Schnittpunkt (r) von $(p)(q)$ mit $(O)z$ die zu $A'x$ parallele Gerade $(r)[s]$ bis zum Kreise zu zeichnen, und die Asymptote $o't' \parallel (O)[s]$ zu ziehen. Natürlich wird nur ein Ast der Hyperbel gezeichnet, da der andere kein eigentliches Bild ist, weil er durch den Schnitt der Rückverlängerungen der Projektionsstrahlen entstanden ist.

Zum Überfluss soll noch die Identität der Construktion mit den durch Rechnung erhaltenen Resultaten nachgewiesen werden.

Für die Meridiane hat man (Fig. 16):

$$\sphericalangle A'(O)(Q_1) = \beta; \quad A'Q = r \operatorname{tg} \beta; \quad (O)Q = Q[O] = r \sec \beta$$
$$QM' = Q[O] \operatorname{tg} [Q_1][O][M] = r \sec \beta \operatorname{tg} \lambda$$

ferner

$$A'P' = r \operatorname{tg} A'(O)(P) = r \cot \beta,$$

und da

$$A'\mu : QM' = A'P' : QP'$$

so wird

$$A'\mu = r \sec \beta \operatorname{tg} \lambda \cdot \frac{r \cot \beta}{r \cot \beta + r \operatorname{tg} \beta} = r \sec \beta \operatorname{tg} \lambda \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \beta^2} = r \operatorname{tg} \lambda \cos \beta$$

als Entfernung des Schnittpunktes mit der X-axe von A'.

Für die Parallelkreise:

1) Ellipsen (Fig. 16).

$$\sphericalangle A'(O)(q_1) = (Q_1)(q_1) - (Q_1)A' = \varphi - \beta$$
$$A'(O)(q) = A'(P) + (P)(q) = 90 - \beta + 90 - \varphi$$
$$= 180 - (\varphi + \beta)$$

$$A'q_1' = r \operatorname{tg} (\varphi - \beta) \qquad (O)q_1' = r \sec (\varphi - \beta)$$
$$A'q' = - r \operatorname{tg} (\varphi + \beta) \qquad (O)q' = - r \sec (\varphi + \beta)$$

$$A'o' = \frac{1}{2}(A'q_1' + A'q') = \frac{r}{2}[\operatorname{tg}(\varphi - \beta) - \operatorname{tg}(\varphi + \beta)]$$
$$= -\frac{r}{2} \frac{\sin 2\beta}{\cos \varphi^2 \cos \beta^2 - \sin \varphi^2 \sin \beta^2}$$

$$o'q' = \frac{1}{2}(A'q' - A'q_1') = -\frac{r}{2}[\operatorname{tg}(\varphi - \beta) + \operatorname{tg}(\varphi + \beta)]$$
$$= -\frac{r}{2} \frac{\sin 2\varphi}{\cos \varphi^2 \cos \beta^2 - \sin \varphi^2 \sin \beta^2}$$

oder Zähler und Nenner durch $\sin \varphi^2$ dividiert:

$$A'o' = r \frac{\sin \beta \cos \beta \operatorname{cosec} \varphi^2}{\sin \beta^2 - \cos \beta^2 \cot \varphi^2}$$

$$o'q' = r \frac{\cot \varphi}{\sin \beta^2 - \cos \beta^2 \cot \varphi^2}.$$

Für die kleine Axe ist:

$$o'm' : ((o))((m)) = o'((O)) : ((o))((O))$$

oder

$$\frac{o'm'}{o'((O))} = \frac{((o))((m))}{((o))((O))} = \frac{(o)(m)}{(o)(O)},$$

daher

$$\frac{o'm'}{o'q'} = \frac{o'm'}{(O)o'} \cdot \frac{(O)o'}{o'q'} = \frac{o'm'}{((O))o'} \cdot \frac{(O)o'}{o'q'} = \frac{(o)(m)}{(o)(O)} \cdot \frac{\sin (O)q'A'}{\sin o'(O)q'}$$
$$= -\frac{(o)(m)}{(o)(O)} \frac{\cos (\varphi + \beta)}{\sin o'(O)q'}$$

Bekanntlich bleibt bei perspektivischer Lage das Doppelverhältnis von 4 Punkten unverändert.[1]) Es ist daher

$$\frac{q'o'}{q_1'q'} : \frac{P'o'}{P'q_1'} = \frac{(q)(o)}{(q)(q_1)} : \frac{u(o)}{u(q_1)},$$

1) S. z. B. *Staudigl*, Lehrbuch der neueren Geometrie pag. 15 oder *Clebsch*, Vorlesungen über Geometrie, herausgegeben von *Lindemann* I. pag. 42.

wenn u der Schnittpunkt von $(O)P'$ mit $(q)(q_1)$ ist; und da

$$\frac{q'o'}{q_1'q'} = \frac{1}{2}; \quad \frac{(q)(q_1)}{u(q_1)} = 2,$$

so folgt

$$\frac{1}{2} : \frac{P'o'}{P'q_1'} = \frac{(q)(o)}{u(o)} : 2$$

oder

$$\frac{(q)(o)}{u(o)} = \frac{P'q_1'}{P'o'}.$$

Hieraus folgt noch

$$\frac{u(o)}{(q)(o)+u(o)} = \frac{P'o'}{P'q_1'+P'o'}$$

oder

$$\frac{u(o)}{(q)(u)} = \frac{P'o'}{q_1'o'}$$

Da aber $P'(O)$ den Winkel $q'_1(O)q'$ halbiert, so ist

$$\begin{aligned} P'q_1' : P'q' = (O)q_1' : (O)q' &= r \sec(\varphi - \beta) : - r \sec(\varphi + \beta) \\ &= \cos(\varphi + \beta) : - \cos(\varphi - \beta) \end{aligned}$$

also

$$\frac{P'o'}{q_1'o'} = \frac{\frac{1}{2}(P'q' - P'q_1')}{\frac{1}{2}(P'q' + P'q_1')} = \frac{-[\cos(\varphi+\beta) + \cos(\varphi-\beta)]}{\cos(\varphi+\beta) - \cos(\varphi-\beta)} = \cot\varphi \cot\beta,$$

demnach

$$u(o) = (q)u \cot\varphi \cot\beta$$

$$(o)(m) = \sqrt{\overline{u(q)}^2 - \overline{u(o)}^2} = u(q)\sqrt{1 - \cot\varphi^2 \cot\beta^2};$$

und da

$$u(q) = (O)(q) \sin q'(O)u = r\cos\varphi,$$

so wird

$$(o)(m) = r\cos\varphi\sqrt{1 - \cot\varphi^2\cot\beta^2}$$

und hiermit

$$\frac{o'm'}{o'q'} = -\frac{r\cos\varphi\sqrt{1-\cot\varphi^2\cot\beta^2}}{(o)(O)} \cdot \frac{\cos(\varphi+\beta)}{\sin o'(O)q'}.$$

Es ist aber im Dreiecke $(o)(O)(q)$:

$$\begin{aligned} (o)(O)\sin o'(O)q' = (o)(q)\sin(o)(q)(O) &= (u(q) - u(o))\sin\varphi \\ &= (q)u(1 - \cot\varphi\cot\beta)\sin\varphi \\ &= r\sin\varphi\cos\varphi(1 - \cot\varphi\cot\beta) \\ &= -\frac{r\cos\varphi\cos(\varphi+\beta)}{\sin\beta}. \end{aligned}$$

Dies oben eingesetzt, giebt endlich:

$$\frac{o'm'}{o'q'} = \sin\beta\sqrt{1 - \cot\varphi^2\cot\beta^2}$$

$$o'm' = \frac{r\cot\varphi}{\sqrt{\sin\beta^2 - \cos\beta^2\cot\varphi^2}}.$$

2) Für die Parabel ist (Fig. 17)

$$(P)z_1 = 90 - \varphi = \beta;\ A'(Q_1) = \beta$$

demnach

$$A'(O)z_1 = (Q_1)(O)(P) - (Q_1)(O)A' - z_1(O)(P) = 90^0 - 2\beta$$
$$A'z_1' = r \cot 2\beta$$

als Entfernung des Scheitels der Parabel vom Mittelpunkte der Karte.

Da ferner

$$P'[O]s' = [o][O][s] = (o)(O)z_1 = z(O)(P) = \beta$$
$$[O]P' = (O)P' = A'(O) \sec A'(O)P' = r \operatorname{cosec} \beta,$$

so ist:

$$A'P' = r \cot \beta$$
$$P's' = [O]P' \operatorname{tg} P'[O]s' = r \operatorname{cosec} \beta \operatorname{tg} \beta = r \sec \beta.$$

Aus der Gleichung der Parabel folgt aber für $y = r \cot \beta$

$$x^2 = 2r \operatorname{tg} \beta (r \cot \beta - r \cot 2\beta) = r^2 \sec \beta^2$$

also

$$x = r \sec \beta$$

übereinstimmend mit obigem Resultate.

3) Für die Hyperbel (Fig. 18) ist:

$$A'(O)(q) = \beta - \varphi$$
$$A'(O)p' = \beta + \varphi$$
$$A'q' = r \operatorname{tg}(\beta - \varphi)$$
$$A'p' = r \operatorname{tg}(\beta + \varphi)$$
$$A'o' = \frac{1}{2} r [\operatorname{tg}(\beta + \varphi) + \operatorname{tg}(\beta - \varphi)] = \frac{r}{2} \frac{\sin 2\beta}{\cos(\beta + \varphi)\cos(\beta - \varphi)}$$
$$= \frac{r \sin \beta \cos \beta \operatorname{cosec} \varphi^2}{\cos \beta^2 \cot \varphi^2 - \sin \beta^2}$$
$$o'q' = \frac{1}{2} r [\operatorname{tg}(\beta + \varphi) - \operatorname{tg}(\beta - \varphi)] = \frac{r}{2} \frac{\sin 2\varphi}{\cos(\beta + \varphi)\cos(\beta - \varphi)}$$
$$= \frac{r \cot \varphi}{\cos \beta^2 \cot \varphi^2 - \sin \beta^2}.$$

Zur Bestimmung der imaginären Halbaxe hat man

$$\frac{q't}{o'q'} = \frac{(r)[s]}{(O)(r)} = \frac{\sqrt{(O)[s]^2 - (O)(r)^2}}{(O)(r)},$$

ferner

$$(O)u = (O)(q) \sin (O)(q)u = r \sin \varphi;$$
$$(O)(r) = (O)u \sec u(O)(r) = r \sin \varphi \sec \beta,$$

also

$$\frac{q't}{o'q'} = \frac{\sqrt{r^2 - r^2 \sin \varphi^2 \sec \beta^2}}{r \sin \varphi \sec \beta}$$
$$= \sqrt{\operatorname{cosec} \varphi^2 \cos \beta^2 - 1} = \sqrt{\cos \beta^2 + \cos \beta^2 \cot \varphi^2 - 1}$$
$$= \sqrt{\cos \beta^2 \cot \varphi^2 - \sin \beta^2}$$

und daher

$$q't = \frac{r \cot \varphi}{\sqrt{\cos \beta^2 \cot \varphi^2 - \sin \beta^2}}.$$

Die Aufgabe: durch zwei durch ihre Centralprojektionen gegebene Punkte das Bild des durch sie gehenden grössten Kreises und ihren sphärischen Abstand zu suchen, lässt sich hier sehr leicht lösen. Sind die beiden Punkte (Fig. 19) M, N, deren Centralprojektionen M', N', so braucht man nur das Dreieck $M'N'O$, wenn O der Kugelmittelpunkt ist, zu construieren um den Winkel bei O zu erhalten; wir suchen hierzu die beiden Entfernungen OM und ON; legt man durch den Kartenmittelpunkt A' und M' eine auf die Zeichnungsfläche senkrechte Ebene, und legt das Dreieck $M'A'O$ nach $M'A'(O)$ um, wobei $A'(O)$ gleich der Entfernung des Augpunktes von der Karte ist (welche Grösse den Maassstab der Karte bestimmt) so ist $(O)M' = OM'$; da ferner alle von A' gleich weit abstehenden Punkte von O gleiche Entfernung haben, so ist $ON' = ON_1$, wenn $A'N' = A'N_1$; demnach $ON' = (O)N_1$; construiert man also über $M'N'$ mit den Seiten $(O)M'$ und $(O)N_1$ das Dreieck $[O]M'N'$, so ist der Winkel $M'[O]N'$ gleich dem sphärischen Abstande der Punkte M, N. Selbstverständlich ist die Gerade $M'N'$ selbst das Bild des die beiden Punkte MN verbindenden grössten Kreises. Eine andere fast ebenso einfache Lösung ergiebt sich aus dem Umstande, dass $M'N'$ die Spur der Ebene MNO auf der Projektionsebene ist. Legt man daher das Dreieck $OM'N'$ um $M'N'$ in die letztere nieder, so ergiebt sich seine wahre Grösse. Hierzu hat man nur von O ein Perpendikel Op auf $M'N'$ zu fällen; dessen Orthogonalprojektion auf die Projektionsebene $A'p$ ist; seine Länge findet man aus dem bei A' rechtwinkligen Dreiecke $OA'p$ gleich pq, wenn $A'q = OA'$, daher die Umlegung des Punktes O in $[O]$, wenn $[O]p = pq$, und das umgelegte Dreieck in $[O]M'N'$ (natürlich identisch mit dem früheren). Hat man eine grosse Reihe von sphärischen Distanzen zu bestimmen, so ist die zweite Methode noch kürzer, denn hat man mit dem Halbmesser $A'O$ der Kugel einen Kreis K um A' als Mittelpunkt beschrieben, so wird die ganze Construktion in folgendem bestehen:

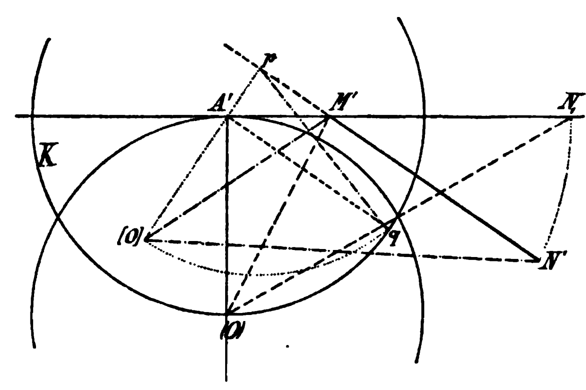


Fig. 19.

$A'p \perp M'N'$

$A'q \parallel M'N'$ bis zum Kreise K

$[O]p = pq$ und $[O]$ mit M' und N' verbinden.

Ebenso einfach ist die Bestimmung des sphärischen Winkels zweier durch ihre Centralprojektionen MN, NP (Fig. 20) gegebenen grössten Kreise. Es kommt dabei lediglich auf die Bestimmung des Neigungswinkels der beiden Ebenen OMN, ONP, an; hierzu legt man eine auf den Schnitt ON senkrechte Ebene E, deren Spur auf der Orthogonalprojektion $A'N$ von ON senkrecht stehen muss. Der Einfacheit halber werde sie durch A' gelegt. Schneidet diese Spur die Tracen MN, NP in m, p, so wird der Schnitt von E mit MNO durch m, der Schnitt von E mit NPO durch p gehen; sei R der gemeinschaftliche Schnitt der drei Ebenen E, MNO, NPO, so ist mR der Schnitt von E mit MNO, pR der Schnitt von E mit NPO, und da E auf RN senkrecht steht, so wird auch $pR \perp RN$, $mR \perp RN$, und pRm der Neigungswinkel der beiden Ebenen. Legt man also das Dreieck pRm um pm in die Zeichnungsfläche um, so erhält man die wahre Grösse dieses Winkels.

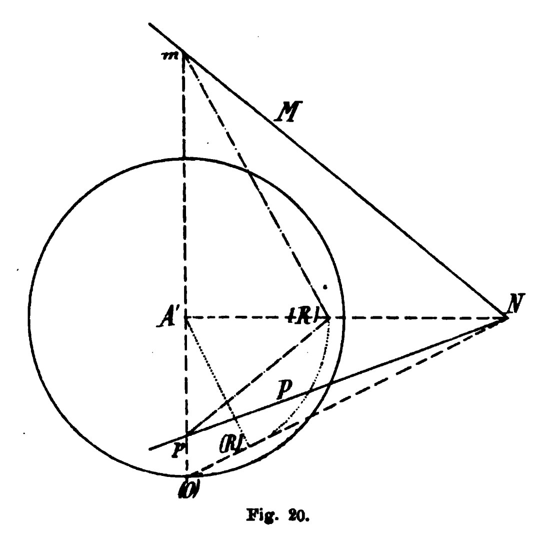


Fig. 20.

Hierzu braucht man nur den Abstand $A'R$ zu kennen; diese Gerade liegt aber in der Ebene $A'ON$ senkrecht auf ON. Legt man das bei A' rechtwinklige Dreieck $OA'N$ um $A'N$ in die Zeichnungsfläche nach $A'(O)N$ um, und fällt hier das Perpendikel $A'(R)$, so ist dieses gleich $A'R$; und macht man $A'[R] = A'(R)$ so ist $m[R]p$ der Neigungswinkel der beiden Ebenen. Offenbar ist auch $A'[R]p = A'Rp$ der Neigungswinkel der durch PN und $A'N$ bestimmten Ebenen.[1])

18. Nach den Formeln (13) und (14) hat man

$$k_1 = \sec v^2; \quad k_2 = \sec v; \quad K = \sec v^3$$
$$\sin \frac{\vartheta}{2} = \operatorname{tg} \frac{v}{2}^2.$$

Tafel 2 giebt die Werte von $\varrho = r \operatorname{tg} v$ für $r = 1$, und die Werte von k_1, k_2, K und $\frac{\vartheta}{2}$ von 10^0 zu 10^0. Man ersieht aus denselben, wie rasch die Vergrösserungen gegen den Rand zu wachsen,

1) Über die graphische Lösung anderer Aufgaben in dieser Projektion sehe man *Thoulet* „Note sur les projections gnomoniques" im „Bull. de la Soc. de Géographie" VI Serie, Bd. 8, (1874), pag. 171 ff.

und wie bedeutende Werte dieselben in verhältnismässig kleinen Entfernungen vom Kartenmittelpunkte haben. Da übrigens wol die Meridiane gerade Linien, aber die Parallelkreise mit Ausnahme derjenigen der Polarprojektion keineswegs einfach zu zeichnende Linien sind, folglich die Construktion der Netze nicht gerade besonders einfach ist, so findet diese Projektionsart auch nur eine ziemlich beschränkte Verwendung. Für Himmelskarten würde sie jedoch schon aus dem Grunde gut anwendbar, weil ja die Himmelskugel thatsächlich von einem im Centrum der Kugel befindlichen Auge betrachtet wird, daher die Centralprojektion ein der Wahrheit nahes Bild liefert; allerdings auch nur für kleinere Theile der Himmelskugel, da das Auge nicht allzu grosse Theile derselben auf einmal übersieht. *Lambert* hat sie übrigens als besonders brauchbar zum Einzeichnen der scheinbaren Kometenbahnen empfohlen; da man nämlich aus der Krümmung derselben (Abweichung der scheinbaren Bahn vom grössten Kreise) nach *Lamberts* berühmtem Satz auf die Entfernung des Kometen von der Sonne schliessen kann, so ist es vortheilhaft hierzu eine Projektion zu wählen, in der die grössten Kreise sich als Gerade darstellen.[1]) Übrigens leistete die Centralprojektion gute Dienste zu Zeiten, wo man Sternpositionen durch sogenannte Alignements bestimmte, indem nämlich die Lage eines Gestirnes so gut als es eben gieng durch den Durchschnitt der Verbindungslinien zweier bekannter (in der Karte verzeichneter) Sternpaare oder durch die Verbindung mit zwei bekannten Sternen zu einem Dreiecke bestimmt wurde. Natürlich war es nötig, wenn die Stellung nicht durch Rechnung bestimmt werden sollte, dass die Verbindungslinien (grössten Kreise) derHimmelskugel sich als Gerade darstellen.

Neuerdings ist diese Projektionsmethode, welche wol zu den ältesten zählen mag[2]) von *M. Hilleret* (Comptes Rendus, Bd. 82, pag. 1095) „Nouveau système de cartes marines pour la navigation par arc de grand cercle“ als neu angegeben worden. Die Aufgabe, die er sich stellt, ist die folgende: Ein Kartennetz zu suchen, wo die grössten Kreise sich als Gerade darstellen, und wo man durch einfache graphische Construktion die Länge des durchlaufenen Bogens und den Winkel des Weges mit dem Meridian erhalten kann. Sei ω (Fig. 21) die Neigung des grössten Kreises MS gegen den Äquator PS, λ_0 die Länge des Schnittpunktes S, λ die Länge eines Punktes M, φ seine Breite, so ist, wenn MP ein sphärisches Perpendikel auf PS ist,

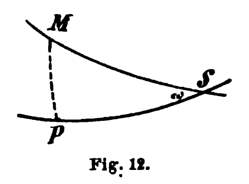


Fig. 12.

1) *Lambert* Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung, III. Bd., „Von der Beobachtung und Berechnung der Kometen“, pag. 252.

2) Siehe hierüber die Bemerkung § 14.

$$MP = \varphi$$
$$PS = \lambda - \lambda_0$$

und man erhält aus dem sphärischen Dreiecke *SPM*:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \omega \sin (\lambda - \lambda_0)$$

oder

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \lambda} = (\operatorname{tg} \omega \cos \lambda_0) \operatorname{tg} \lambda - \sin \lambda_0 \operatorname{tg} \omega = A \operatorname{tg} \lambda + B$$

wo A und B Constante sind. Soll in der Ebene die Gleichung des Bildes

$$y = ax + b$$

sein, wenn a und b ebenfalls Constante sind, so muss

$$\left.\begin{array}{l} x = \operatorname{tg} \lambda \\ y = \operatorname{tg} \varphi \sec \lambda \end{array}\right\} \qquad \text{(a)}$$

sein, und dann wird

$$a = A = \operatorname{tg} \omega \cos \lambda_0$$
$$b = B = - \sin \lambda_0 \operatorname{tg} \omega$$

also die Gleichung des Bildes des grössten Kreises

$$y = x \operatorname{tg} \omega \cos \lambda_0 - \operatorname{tg} \omega \sin \lambda_0.$$

Die Formeln (a) sind nun genau die früher für die centrale Äquatorealprojektion erhaltenen; es leuchtet aber ein, dass dies nicht einmal die allgemeinste Lösung der gestellten Aufgabe ist, indem *jede* Centralprojektion die Eigenschaft hat, dass die Bilder der grössten Kreise Gerade sind, und dass nach den im vorigen Paragraphen angegebenen Construktionsmethoden die Bestimmung der Entfernungen und Winkel sehr einfach ist.[1]) Mit Rücksicht auf den Vortheil der Wegersparnis beim Fahren in dem grössten Kreise als der kürzesten Linie gegenüber demjenigen in der Loxodrome (s. § 28) wäre es eine Frage, ob die Nachtheile der allerdings nur geringen Mehrarbeit bei den graphischen Constructionen in der Centralprojektion verbunden mit der Variation des Schiffskurses nicht durch jenen Vortheil aufgewogen werden. Doch soll auf diesen Punkt hier nicht weiter eingegangen werden, da die Entscheidung hierüber in letzter Instanz doch nur den Seeleuten von Fach zusteht.

Ein Nachtheil erfordert jedoch einige Besprechung: Man kann nicht die ganze Erdoberfläche, nicht einmal die Hälfte in einer Darstellung umfassen. Über 70°, und selbst schon 60° werden die Vergrösserungen so bedeutend, dass, wenn die Darstellung der Kartenmitte nicht so klein werden soll, dass sie unbrauchbar würde, eine Einzeichnug jener Gebiete wegen der unverhältnismässigen Grösse unthunlich wird. Entfernungen über 130 bis 140° können dann nicht gemessen werden. Hat man aber mehrere Darstellungen in verschiedenen Partien, so kann man sich zur Bestimmung so grosser Entfernungen leicht dadurch helfen, dass man die Entfernung eines

---

1) *Hilleret* giebt keine Construktion für den Winkel, sondern bestimmt die wahre Neigung des Schiffscurses aus dem verzeichneten durch Hilfscurven.

Punktes vom Antipodenpunkte des anderen bestimmt und dann das Supplement zu 180⁰ nimmt.

Eine von dieser verschiedene Frage ist aber die, wie man die ganze Kugel partienweise am praktischsten darstellen könne. Man hat hierzu mehrfach Versuche gemacht, die ganze Kugel auf die Fläche eines umschriebenen regulären Polyëders abzubilden, und solche Darstellungen wurden auch für die Erdkugel in früherer Zeit verwendet.

1) Wählt man ein umschriebenes Tetraëder und zwar so, dass eine Seitenfläche desselben die Kugel im Pole berührt, so erhält man eine Polarprojektion und drei Horizontalprojektionen, für welche die Mittelpunkte der Darstellungen auf einem Parallelkreise gleichweit von einander je um 120^0 Längenunterschied von einander abstehen; die Breite dieses Parallels ist $\pm 19^0\,28'\,16''\!.4$, je nachdem das Tetraëder im Süd- oder Nordpole berührt. Dieses ergiebt sich aus der Überlegung, dass die Perpendikel, welche man aus dem Centrum der Kugel auf zwei Tetraëderflächen fällt, einen Winkel einschliessen, der gleich ist dem Supplemente des Neigungswinkels der beiden Tetraëderflächen. Stossen allgemein n m-ecke bei irgend einem regulären Polyeder zusammen, und schneidet man diese Ecke durch eine Hilfskugel, so entsteht auf dieser ein reguläres sphärisches n-eck dessen Seiten gleich sind den Winkeln der das Polyeder begrenzenden m-ecke, also $s = \pi - \frac{2\pi}{m}$; da der Centriwinkel des sphärischen regelmässigen n-eckes $\beta = \frac{2\pi}{n}$ ist, so ist der Neigungwinkels W der Seiten des regulären Polyeders gegeben durch

$$\sin\frac{W}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{m}}.$$

Für das Tetraëder ist $m = n = 3$ daher $\sin\frac{W}{2} = \cot 60^0$

$$W = 70^0\,31'\,43''\!.6,$$

demzufolge der sphärische Abstand je zweier der vier Kartenmittelpunkte $109^0\,28'\,16''\!.4$, und da einer in den Pol fällt, so ist dies die Poldistanz der drei anderen.

2. Projiciert man die Kugel auf einen umschriebenen Würfel,[1]) so ist $n = 3$, $m = 4$, $W = 90^0$. Legt man den Würfel so, dass zwei Seitenflächen in den Polen berühren, so erhält man zwei Polar- und vier Äquatorealprojektionen, deren Mittelpunkte um je 90^0

1) *Thoulet* (Note sur la projection gnomonique im Bulletin de la sociéte de Geographie de Paris 1874. VI. Serie. Bd. 8) wählt den Würfel so, dass eine Seitenfläche die Erde im Pole berührt — Nach *Gretschel* (Lehrbuch der Landkartenprojektionen pag. 59) hat der Jesuit *Paradies* in seiner 1674 in Paris veröffentlichten „*Globi coelestis in tabulas planas redacti descriptio*" den ganzen Himmel auf die 6 Seiten eines Würfels abgebildet.

Länge von einander abstehen. Wählt man den Würfel so, dass die Projektionen der Pole in zwei Ecken fallen, so werden sechs Horizontalprojektionen entstehen, deren Mittelpunkte zu je dreien auf zwei Parallelkreisen liegen, deren Breite $\pm 35^0 15' 51''8$ ist[1]); auf jedem der letzteren stehen die drei darauf liegenden Mittelpunkte um 120^0 Länge ab, so aber, dass sie gegeneinander um 60^0 Länge verschoben sind. Es sind also die sphärischen Coordinaten der Mittelpunkte $0^0, +\beta$; $60^0, -\beta$; $120^0, +\beta$; $180^0, -\beta$; $240^0, +\beta$; $300^0, -\beta$.

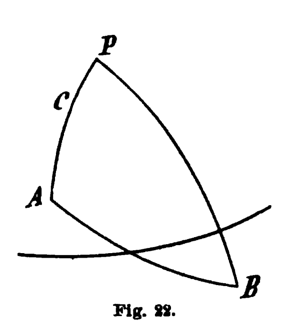


Fig. 22.

Seien nämlich A, B, (Fig. 22) zwei angrenzende Kartenmittelpunkte, P der Pol, so muss $AB = 90^0$ sein, weil A, B die Fusspunkte der vom Mittelpunkte der Kugel auf die Würfelflächen gefällten Perpendikel sind; es ist $APB = 60^0$ und $AP = 90^0 - x$; $BP = 90^0 + x$ demnach

$$\cos AB = 0 = -\sin x^2 + \cos x^2 \cos 60^0$$

daher

$$\operatorname{tg} x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,;\; x = 35^0 15' 51''8.$$

Sei $Pabc$ (Fig. 23) die eine Würfelseite, in deren Mittelpunkt M die Kugel berührend gedacht wird; ihr Radius ist natürlich gleich der halben Würfelseite. Legt man den Meridian, dessen Bild Pb ist, um Pb in die Zeichnungsfläche, so kommt der Kugelmittelpunkt nach C; K ist der umgelegte Meridian, (P) der umgelegte Pol; QC der umgelegte Schnitt des Äquators mit der Meridianebene, AB das Bild des Äquators, wenn AB in dem Durchschnittspunkte von CQ mit Pb auf letzterer Geraden senkrecht errichtet wird. Die Construktion wird, wie in § 17 erläutert ist, durchgeführt; die Meridiane durch Umlegung der Äquatorebene um AB, die Parallelkreise durch Bestimmung der Axen; für diese kann man aber hier ausserdem die in Pa, Pb, Pc liegenden Punkte bestimmen. Ist $QCm = \varphi$, so bestimmt Cm den auf Pb liegenden Punkt m'. Um den auf Pc liegenden Punkt zu bestimmen, legen wir das Dreieck POc (wenn O der im Raume gedachte Kugelmittelpunkt ist) um; es ist aber $OP = Oc = CP$; macht man daher $P[O] = c[O] = PC$, und zieht aus dem Mittelpunkte $[O]$ mit dem Kugelhalbmesser den Kreis k, so ist dieser die Umlegung des in der Ebene OPc liegenden Meridians, dessen Bild Pc ist; $[O][P]$ die Umlegung der Polaraxe, und daher, wenn $[P][O]n = 90 - \varphi$, der Schnittpunkt n' von $[O]n$ und Pc der auf Pc liegende Punkt des Parallels von der Breite φ. Das Netz wird durch Fig. 23 veranschaulicht.

---

1) Statt dessen erhält *Gretschel* (l. c. p. 60) 45^0, was unrichtig ist; denn in der angenommenen Stellung des Würfels kömmt seine Lage gleichsam einem rechtwinkligen Rhomboeder gleich.

3. Für das Oktaëder[1]) ist $n = 4$, $m = 3$; $\sin \frac{W}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$; $W = 109^0\,28'\,16''4$, daher der sphärische Abstand der Fusspunkte der Perpendikel auf der Kugel $70^0\,31'\,43''6$. Legt man daher das Oktaëder so, dass die Projektion der Pole in zwei Ecken fallen, so entstehen acht Horizontalprojektionen, deren Mittelpunkte zu je vier auf zwei Parallelkreise fallen, deren Breite $\pm 35^0\,15'\,51''8$ ist. Je ein Mittelpunkt auf der nördlichen und auf der südlichen Halbkugel fallen auf denselben Meridian, und die vier Meridiane der Kartenmittelpunkte stehen um je 90^0 von einander ab.

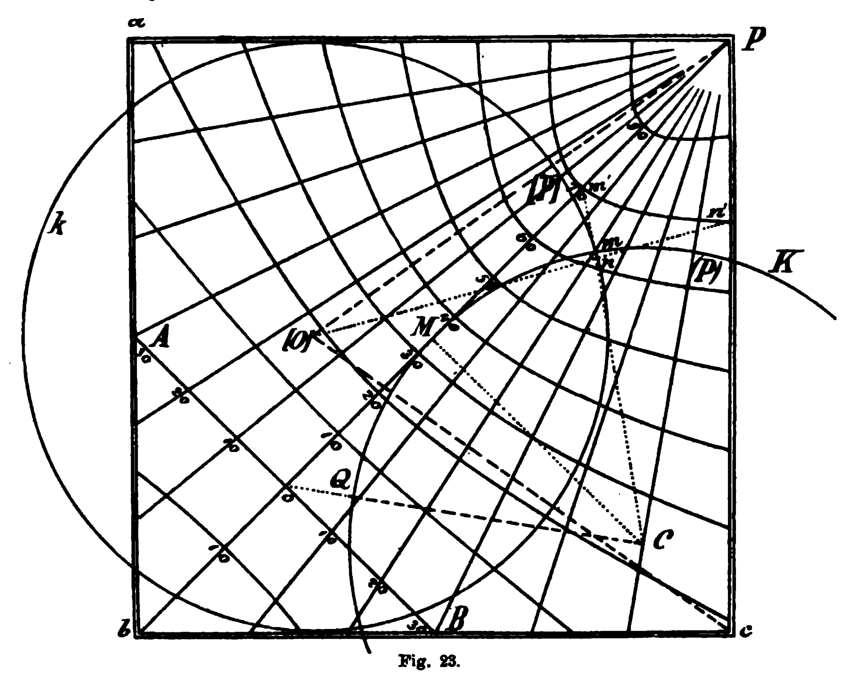


Fig. 23.

4. Für das Dodekaëder[2]) ist $n = 3$, $m = 5$; $W = 116^0\,33'\,54''2$, daher die Abstände der Kartenmittelpunkte $63^0\,26'\,5''8$. Legt man daher das Dodekaëder so, dass zwei Flächen die Kugel in den Polen berühren, so erhält man zwei Polarprojektionen und zehn Horizontal-

1) Gewählt von *B. de Chancourtois*. S. dessen Carte du Globe en projection gnomonique avec le réseau pentagonal superposé im Bulletin de la Société de Geographie de Paris 1874. VI Serie Bd. 7.

2) Die Rechnungen, welche *Elie de Beaumont* über die Richtung der Gebirgszüge in Europa durchgeführt hat, führen ihn zu dem Resultate, dass dieselben die Hauptrichtungen eines der Erde umschriebenen regulären Dodekaëders sind, für welches der Mittelpunkt der einen Seite 50° 46′ 3″ nördliche Breite, 8° 53′ 31″ östliche Länge von Paris, und das Azimut der Richtung gegen eine Ecke des Dodekaeders 13° 9′ 41″ von Nord nach West ist, woraus sich die ganze Orientierung des Netzes ergiebt. (s. C. R. Bd. 33 pag. 131).

projektionen; für letztere liegen die Mittelpunkte alternierend in zwei Parallelkreisen, deren Poldistanzen $63^0\,26'\,5''8$ sind, deren Breiten demnach $\pm\,26^0\,33'\,54''2$ sind. Die Längendifferenz der auf demselben Parallelkreis liegenden Mittelpunkte beträgt 72^0 und die auf den beiden Parallelkreisen liegenden sind um je 36^0 in Länge gegen einander verschoben.

5. Für das Ikosaëder ist $n = 5$, $m = 3$, $W = 138^0\,11'\,22''8$, daher der Abstand der Kartenmittelpunkte auf der Kugel $41^0\,48'\,37''2$. Legt man das Ikosaëder so, dass die Pole sich in zwei Ecken hineinprojicieren, so entstehen zwanzig Horizontalprojektionen, für welche die Kartenmittelpunkte zu je fünf in vier Parallelkreisen liegen. Für den mittleren ist (s. Fig. 22) $AB = 41^0\,48'\,37''2$, $APB = 36^0$, daher, wenn wieder $AP = 90 - x$, $BP = 90 + x$ gesetzt wird:

$$\cos AB = -\sin x^2 + \cos x^2 \cos APB,$$

woraus

$$\sin x^2 = \frac{\cos APB - \cos AB}{1 + \cos APB},$$

also $x = \pm\,10^0\,48'\,44''4$ folgt. Die beiden anderen stehen von diesen um die Entfernung $AC = 41^0\,48'\,37''2$ gegen die Pole zu ab, haben also die Breite $\pm\,52^0\,37'\,21''6$. Die auf derselben Hemisphäre gelegenen zehn Kartenmittelpunkte liegen zu je zweien auf demselben Meridian. Die fünf Meridiane der Kartenmittelpunkte haben eine Längendifferenz von je 72^0, die Kartenmittelpunkte der beiden Hemisphären sind um 36^0 in Länge gegen einander verschoben.

4. Externe Projektionen.

19. Für diese gelten die Gleichungen I, II, III, III'. Obzwar nun im allgemeinen diese Projektionen noch weniger für die Anwendung geeignet sind, wie die bisher betrachteten, einfacheren, so kommen doch gewisse Spezialisierungen dieser Projektionen vor, welche namentlich mit Rücksicht auf Vergrösserung und Verzerrung den bereits behandelten vorzuziehen sind.

Um die Gleichungen der Meridiane zu erhalten, schreiben wir die Gleichungen für die rechtwinkligen Coordinaten:

$$rx \sin\beta \sin\varphi + (rx \cos\beta \cos\lambda - Dr \sin\lambda)\cos\varphi = -ax \quad \text{(m)}$$

$$(ry \sin\beta - Dr\cos\beta)\sin\varphi + (ry\cos\beta\cos\lambda + Dr\sin\beta\cos\lambda)\cos\varphi = -ay \quad \text{(n)}$$

Multipliciert man (m) mit $+(ry \sin\beta - Dr\cos\beta)$; (n) mit $-rx\sin\beta$ und addiert, so ergiebt sich

$$(Dr\cos\beta\sin\lambda - ry\sin\beta\sin\lambda - rx\cos\lambda)\cos\varphi = ax\cos\beta.$$

Multipliciert man (m) mit $-(ry\cos\beta\cos\lambda + Dr\sin\beta\cos\lambda)$; (n) mit $+(rx\cos\beta\cos\lambda - Dr\sin\lambda)$ und addiert, so findet man

$$(Dr\cos\beta\sin\lambda - ry\sin\beta\sin\lambda - rx\cos\lambda)\sin\varphi$$
$$= ax\sin\beta\cos\lambda + ay\sin\lambda.$$

Quadriert und addiert man die erhaltenen Gleichungen für $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$, und ordnet, so folgt

$$\begin{aligned} & x^2 (a^2 \cos\beta^2 + a^2 \sin\beta^2 \cos\lambda^2 - r^2 \cos\lambda^2) \\ & + y^2 (a^2 \sin\lambda^2 - r^2 \sin\lambda^2 \sin\beta^2) + 2xy \sin\beta \sin\lambda \cos\lambda (a^2 - r^2) \\ & + 2r^2 Dx \cos\beta \sin\lambda \cos\lambda + 2r^2 Dy \sin\beta \cos\beta \sin\lambda^2 \\ & = D^2 r^2 \cos\beta^2 \sin\lambda^2, \end{aligned} \tag{17}$$

als Gleichung der Meridiane.

Zur Elimination von λ erhält man aus der Gleichung für y:

$$r \cos\varphi \cos\lambda = \frac{Dr \cos\beta \sin\varphi - ay - ry \sin\beta \sin\varphi}{D \sin\beta + y \cos\beta};$$

dies in die Gleichung für x eingesetzt, giebt

$$r \cos\varphi \sin\lambda = \frac{ax \sin\beta + rx \sin\varphi}{D \sin\beta + y \cos\beta}.$$

Quadriert und addiert man, so findet sich

$$\begin{aligned} & x^2 (a \sin\beta + r \sin\varphi)^2 + y^2 [(a^2 - r^2) \cos\beta^2 + (a \sin\beta + r \sin\varphi)^2] \\ & - 2Dr \cos\beta [a \sin\varphi + r \sin\beta] y \\ & = D^2 r^2 (\cos\varphi^2 \sin\beta^2 - \sin\varphi^2 \cos\beta^2) \end{aligned} \tag{18}$$

als Gleichung der Parallelkreise. Man könnte die Gleichungen (17) und (18) auch wieder auf die gewöhnliche Form der Kegelschnittsgleichungen bringen [1]), allein es hätte dies keinen besonderen Zweck. Für die Zeichnung des Netzes wird es ohnehin besser, direkt die Lehren der darstellenden Geometrie zu Hilfe zu ziehen.

a) Für eine Polarprojektion wird $\beta = 90^0$; daher gehen die Gleichungen (17), (18) über in

$$x^2 (a^2 - r^2) \cos\lambda^2 + y^2 (a^2 - r^2) \sin\lambda^2 + 2xy \sin\lambda \cos\lambda (a^2 - r^2) = 0,$$

oder

$$(x \cos\lambda + y \sin\lambda)^2 = 0,$$

---

1) Für die Meridiane hätte man eine Verschiebung und Drehung der Coordinatenaxen vorzunehmen. Für die Parallelkreise wird es einfacher. Man hat für dieselben zunächst:

$$\begin{aligned} & (a \sin\beta + r \sin\varphi)^2 x^2 + \Big\{ \sqrt{(a^2 - r^2) \cos\beta^2 + (a \sin\beta + r \sin\varphi)^2}\, y \\ & \qquad - \frac{Dr \cos\beta (a \sin\varphi + r \sin\beta)}{\sqrt{(a^2 - r^2) \cos\beta^2 + (a \sin\beta + r \sin\varphi)^2}} \Big\}^2 \\ & = D^2 r^2 \Big\{ \frac{\cos\beta^2 (a \sin\varphi + r \sin\beta)^2}{(a^2 - r^2) \cos\beta^2 + (a \sin\beta + r \sin\varphi)^2} + \cos\varphi^2 \sin\beta^2 - \sin\varphi^2 \cos\beta^2 \Big\} \\ & = \frac{D^2 r^2 \cos\varphi^2 (a \sin\beta + r \sin\varphi)^2}{(a^2 - r^2) \cos\beta^2 + (a \sin\beta + r \sin\varphi)^2}, \end{aligned}$$

folglich die Gleichung:

$$\frac{x^2}{\dfrac{D^2 r^2 \cos\varphi^2}{(a^2 - r^2) \cos\beta^2 + (a \sin\beta + r \sin\varphi)^2}} + \frac{\Big\{ y - \dfrac{Dr \cos\beta (a \sin\varphi + r \sin\beta)}{(a^2 - r^2) \cos\beta^2 + (a \sin\beta + r \sin\varphi)^2} \Big\}^2}{\dfrac{D^2 r^2 \cos\varphi^2 (a \sin\beta + r \sin\varphi)^2}{[(a^2 - r^2) \cos\beta^2 + (a \sin\beta + r \sin\varphi)^2]^2}} = 1$$

also

$$y = -x \cot \lambda \tag{17a}$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{Dr\cos\varphi}{a+r\sin\varphi}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{Dr\cos\varphi}{a+r\sin\varphi}\right)^2} = 1. \tag{18a}$$

b) Für eine Äquatorealprojektion ist $\beta = 0$, daher die Gleichung der Meridiane:

$$x^2(a^2 - r^2\cos\lambda^2) + a^2y^2\sin\lambda^2 + 2r^2Dx\sin\lambda\cos\lambda = D^2r^2\sin\lambda^2 \tag{17b}$$

und diejenige der Parallelkreise

$$\frac{x^2}{\frac{D^2r^2\cos\varphi^2}{a^2-r^2\cos\varphi^2}} + \frac{\left(y - \frac{aDr\sin\varphi}{a^2-r^2\cos\varphi^2}\right)^2}{\frac{D^2r^4\cos\varphi^2\sin\varphi^2}{(a^2-r^2\cos\varphi^2)^2}} = 1. \tag{18b}$$

a) Um das Netz für die Polarprojektion zu construieren, denken wir uns wieder die Ebene des ersten Meridians um ihren Schnitt mit der Projektionsebene in diese umgelegt. Ist A' (Fig. 24) der Kartenmittelpunkt,

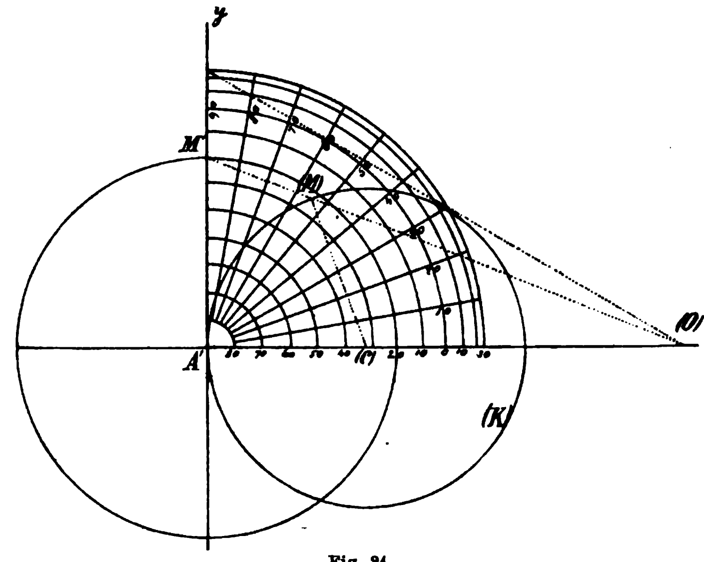


Fig. 24.

$A'y$ der erste Meridian, so ist für eine Polarprojektion A' das Bild des Poles. Denkt man sich die Projektionsebene als berührende Ebene, so wird bei der Umlegung irgend ein Meridian, z. B. der erste, in die Lage (K) kommen, das Auge nach (O), und wenn $A'(C)(M) = 90 - \varphi$, so giebt der Projektionsstrahl $(O)(M)$, bis M' verlängert, den Halbmesser $A'M'$ des Kartenparallels. Die Meridiane sind, wie bei allen Polarprojektionen Gerade, die untereinander die durch die Längendifferenz derselben angegebenen Winkel einschliessen. In Fig. 24 ist ein Quadrant einer solchen Projektion gezeichnet. Man sieht schon

aus der Figur, dass in derselben die Entfernungen der Parallelkreise untereinander bis gegen den Kartenrand zu, der durch die Tangente von (O) an (K) bestimmt ist, ziemlich gleich bleiben, weshalb diese Projektionen bei günstiger Wahl des Projektionscentrums recht gute Bilder geben.

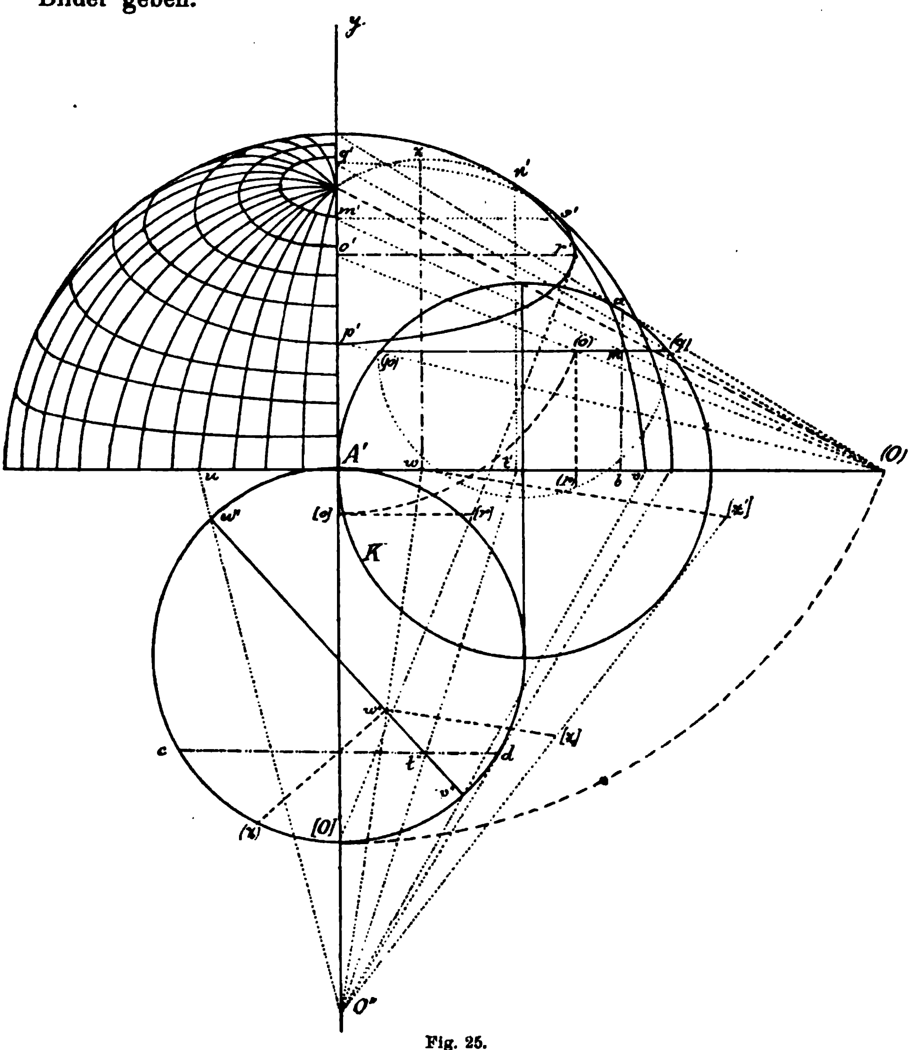


Fig. 25.

b) Sei für eine Äquatorealprojektion A' (Fig. 25) die Kartenmitte, $A'y$ der erste Meridian. Legt man dessen Ebene sammt dem in der Äquatorebene befindlichen Projektionscentrum um, so kömmt derselbe nach K, das Auge nach (O); $(O)(p)$, $(O)(q)$ sind Projektionsstrahlen für zwei im Meridian befindliche Punkte eines Parallels; deren Schnittpunkte p', q' mit $A'y$ geben die kleine Axe seines Bildes; o' ist dessen Mittelpunkt, wenn $p'o' = q'o'$ und (o) der Punkt, dessen

Bild o' ist; die Länge der in diesem Punkte senkrecht auf (p) (q) errichteten Ordinate des Parallelkreises ist $(o)(r)$. Legt man daher Oor um die Trace $o'r'$ in die Zeichnungsfläche, so dass $o'[O] = o'(O)$; $o'[o] = o'(o)$, und macht man $[o][r] = (o)(r)$, so bestimmt der Projektionsstrahl $[O][r]$ den Endpunkt r' der zweiten Axe. Der Contourkreis der Projektion ist der Schnitt des die Kugel umhüllenden Kegels, dessen Spitze O ist; die Berührungslinie mit der Kugel ist daher ein kleiner Kreis, dessen Orthogonalprojektion auf die Ebene des ersten Meridians (in der Umlegung) ab ist; m ist die Orthogonalprojektion des Schnittpunktes des Parallelkreises pq mit ab, auf dieselbe Ebene, daher $m's'$ die perspektivische Projektion der Sehne ms, wenn m' die perspektivische Projektion von m, und $m's' \perp A'y$ ist; der Schnittpunkt s' von $m's'$ mit dem Contourkreise ist daher der Berührungspunkt des Parallels $p'r's'q'$ mit demselben. Natürlich wird nur der Theil $p'r's'$ desselben gezeichnet, da der andere auf dem vorderen, nicht abgebildeten Theile der Kugel liegt. Für die Zeichnung der Meridiane nehmen wir eine Orthogonalprojektion der Kugel auf die Äquatorebene, die wir dann in die Zeichnungsfläche umlegen, zu Hilfe. $A'cd$ ist die Orthogonalprojektion der Kugel, gleichzeitig der Äquator, O'' der Ort des Auges. Ist $O''d$ eine Tangente an $A'cd$, so ist cd derjenige kleine Kreis der Kugel, dessen Projektion den Contourkreis der Projektion giebt. Die Orthogonalprojektion eines Meridians sei $u''v''$; $O''u''$, $O''v''$ sind die in der Äquatorebene liegenden Projektionsstrahlen, welche die eine Axe uv der Projektion des Meridians bestimmen; die andere ist im Halbierungspunkte w von uv senkrecht auf uv. wz' ist die perspektivische Projektion der in w'' auf die Äquatorebene senkrechten Ordinate, deren Länge $w''(z)$ ist. Die Umlegung des Dreieckes $O''w''z$ giebt, wenn $w''[z] = w''(z)$ gemacht wird, den umgelegten Projektionsstrahl $O''[z]$, also die Länge von $wz' = w[z']$. Die in t'' auf die Äquatorebene errichtete Senkrechte ist der Schnitt der Meridianebene uv und der Ebene cd; deren perspektivische Projektion $t'n'$ bestimmt den Punkt n', in welchem die Meridianellipse der Karte den Contourkreis derselben berührt. Natürlich wird wieder nur der Theil vn' oder $uz'n'$ gezeichnet.

Fig. 25 giebt einen Quadranten des Netzes; die rechts vom Meridian und unterhalb des Äquators liegenden Theile sind dem gezeichneten Quadranten völlig symmetrisch.

c) Horizontalprojektion. Die Construktion der Parallelkreise ist genau so, wie im früheren Falle, und dient auch für Fig. 26, in welcher die Buchstaben dieselbe Bedeutung haben wie in Fig. 25, die Erklärung in *b*). (In Fig. 26 ist die Construktion des Äquators durchgeführt).

Die Construktion der Meridiane ist hier nicht so einfach.

Wir bemerken zuerst, dass, wenn ein schiefer Kreiskegel durch eine Ebene geschnitten wird, der Schnitt ein Kegelschnitt sein wird,

dessen Axen parallel beziehungsweise senkrecht zur Trace der schneidenden Ebene auf der Ebene des Basiskreises sein werden. Da nun das Bild des Meridians von der Länge λ der Schnitt des projicierenden schiefen Kreiskegels mit der Projektionsebene ist, so haben wir, um die Axen des letzteren zu finden, die Trace der Projektionsebene auf der Meridianebene, oder, was dasselbe ist, letztere auf der ersteren zu bestimmen. Indem alle Meridianebenen durch die Polaraxe der Erdkugel

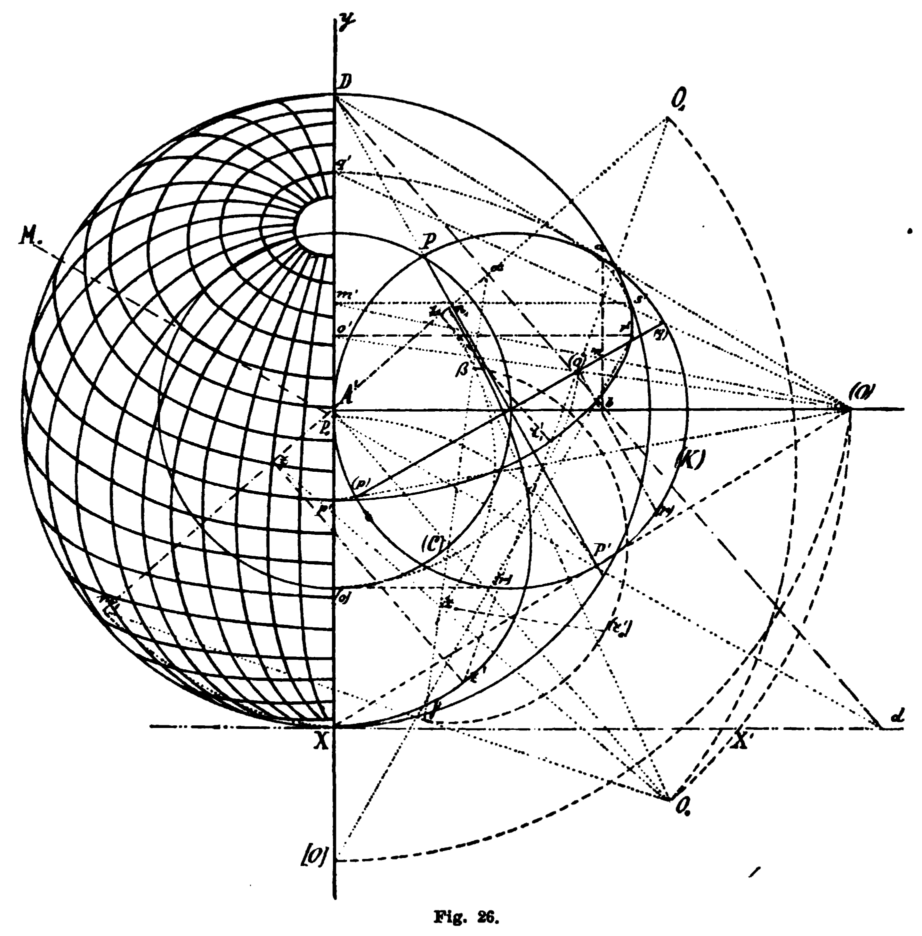


Fig. 26.

gehen, gehen alle die zu bestimmenden Tracen durch den Durchstosspunkt der letzteren mit der Projektionsebene, welcher in dem Schnitte D von PP' mit $A'y$ liegt.

Legt man durch das Auge eine auf die Polaraxe senkrechte Ebene E, deren Schnitt mit der Ebene des ersten Meridians in der Umlegung OX ist,[1]) so ist XX' deren Trace; dreht man die Ebene

1) Dass D und X in den Contourkreis fallen, und OX durch P' geht, ist rein zufällig, und durch die spezielle Annahme der Figur bedingt.

E um XX' in die Projektionsebene, so kömmt der der Polaraxe PP' angehörige Punkt (hier P' selbst) nach P_0. $P_0 y$ ist die Umlegung des Schnittes der Ebene des ersten Meridians und der Ebene E. Macht man $y P_0 M_0 = \lambda$, so ist $M_0 P_0$ der Schnitt der Ebene des Meridians von der Länge λ auf der Ebene E; die Verlängerung von $M_0 P_0$ trifft XX' in einem Punkte d, der der Ebene E, der Ebene des Meridians von der Länge λ, und der Projektionsebene angehört; daher ist Dd die Trace der Ebene des fraglichen Meridians auf der Projektionsebene.

Die eine Axe hat nun die Richtung $A'\alpha$ senkrecht auf Dd; legt man durch O, A', α eine Ebene, und legt diese um $A'\alpha$ in die Zeichnungsfläche, so kömmt der Schnitt der Meridianebene mit dieser Ebene nach $\alpha(C)$, wenn $A'(C) \perp A'\alpha$ und $A'(C)$ gleich dem Kugelradius ist. Macht man dann $(C)\beta = (C)\gamma$ gleich dem Kugelradius, so sind $\beta\gamma$ die Umlegungen der in der Ebene $A'O\alpha$ gelegenen Punkte des Meridians; die Umlegung des Auges kömmt nach O_0, wenn $A'O_0 = A'(O)$; die Projektionsstrahlen $O_0\beta$, $O_0\gamma$ bestimmen auf $A'\alpha$ die Endpunkte m_1, n_1 der einen Axe. Der Halbierungspunkt z von $m_1 n_1$ ist der Mittelpunkt, die durch z zu Dd parallel gezogene Gerade die Richtung der zweiten Axe der Ellipse. z ist aber die Projektion des im Durchmesser $\beta\gamma$ gelegenen Punktes z_0, die zweite Axe daher die Projektion der in z_0 auf $\beta\gamma$ senkrechten Ordinate, deren Länge $z_0(z_0')$ ist: um die Endpunkte der zweiten Axe zu finden, legen wir endlich das Dreieck Ozz' um zz' in die Zeichnungsfläche; es kömmt O nach O_1, z nach z_1 wenn $O_1 z = O_0 z$; $z_1 z = z_0 z$. Macht man noch $z_1 z_1' \perp z O_1$ und gleich $z_0(z_0')$, so ist $O_1 z_1'$ der umgelegte Projektionsstrahl, und zz' die zweite Halbaxe.

In der externen Projektion kann man mehr als die Hälfte der Kugel zeichnen. Die Begrenzung des dargestellten Kugeltheiles ist der Berührungskreis des durch das Projektionscentrum gelegten Tangentenkegels. Für eine Polarprojektion wird dies ein Parallelkreis, dessen Breite bestimmt ist durch $\sin\varphi = -\frac{r}{a}$. Nennt man das Verhältnis $\frac{a}{r} = x$, so werden die Ausdrücke für den Halbmesser des Kartenparalleles

$$\varrho = \frac{Dr \sin v}{a + r\cos v} = \frac{D \sin v}{x + \cos v}$$

für die Vergrösserungen

$$k_1 = \frac{D}{r} \cdot \frac{1 + x\cos v}{(x + \cos v)^2}; \qquad k_2 = \frac{D}{r} \cdot \frac{1}{x + \cos v}$$

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{x-1}{x+1} \operatorname{tg} \frac{v}{2}^2$$

oder

$$k_1 = k_2 \frac{1 + x\cos v + x^2 - x^2}{x + \cos v} = k_2 \left\{ x - \frac{(x^2 - 1)}{x + \cos v} \right\}$$
$$= k_2 \left[x - \frac{r}{D} k_2 (x^2 - 1) \right]$$

Da die relativen Verhältnisse ungeändert bleiben, wenn man D verändert, dabei aber a constant lässt, so kann man $D = a + r$ setzen, und hat

$$\frac{D}{r} = (1 + x), \quad \varrho = r \frac{(1 + x) \sin v}{x + \cos v}, \quad k_2 = \frac{1 + x}{x + \cos v}$$

oder

$$\left. \begin{array}{ll} k_2 = \dfrac{1 + x}{x + \cos v} & k_1 = k_2 \left[x - (x - 1) k_2 \right] \\ \varrho = k_2 r \sin v & \sin \dfrac{\delta}{2} = \dfrac{x - 1}{x + 1} \operatorname{tg} \dfrac{v}{2}^2 \end{array} \right\} . \tag{19}$$

Für den äussersten Parallel (oder bei einer Horizontalprojektion für die äussersten Punkte der Karte) ist

$$\sin \varphi = \cos v = -\frac{1}{x},$$

daher

$$k_2 = \frac{1 + x}{x - \dfrac{1}{x}} = \frac{x(1 + x)}{x^2 - 1} = \frac{x}{x - 1}, \quad \sin v = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - 1},$$

folglich

$$k_1' = 0; \quad k_2' = \frac{x}{x - 1} = \frac{1}{2 \cos \dfrac{v}{2}^2}; \quad \varrho' = \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}} \cdot r = r \operatorname{tg} \frac{1}{2} v$$

$$\sin \frac{\delta}{2} = 1; \quad \frac{\delta}{2} = 90^0.$$

Tafel 4 giebt die Werte von ϱ, k_1, k_2, K und $\frac{\delta}{2}$ von 10^0 zu 10^0 Entfernung vom Kartenmittelpunkte (Poldistanz für Polarprojektionen) für $x = 1.0$ bis $x = 2.6$ und die für die äussersten Kartenpunkte geltenden Werte k_2' und ϱ'.

20. *a*) **De la Hire** (Construction d'un nouvel astrolabe universel, Histoire de l'Académie 1701, Paris 1704, Memoiren, pag. 257) wählt das Projektionscentrum so, dass das Bild des Halbierungspunktes eines vom Mittelpunkte der darzustellenden Fläche gemessenen Bogens von 90^0 auch das Bild des Bogens halbiert.

Sei in Fig. 1: $v_1 = 45^0$, $v_2 = 90^0$, so wird hiefür:

$$\varrho_1 = \frac{Dr \sin 45^0}{a + r \cos 45^0}; \quad \varrho_2 = \frac{Dr}{a}.$$

Daher nach obiger Bedingung

$$\frac{Dr}{a} = \frac{2 Dr \sin 45^0}{a + r \cos 45^0}$$

und da

$$\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{1}{2} \sqrt{2},$$

so wird

$$\frac{1}{a} = \frac{\sqrt{2}}{a + \frac{r}{2}\sqrt{2}}$$

woraus

$$\frac{a}{r} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} = 1{\cdot}7071068.$$

Das Vergrösserungsverhältnis ist in radialer Richtung

$$k_1 = \frac{D}{r} \frac{1 + \frac{a}{r}\cos v}{\left(\frac{a}{r} + \cos v\right)^2}.$$

Dasselbe ist daher im Mittelpunkte der Karte

$$k_1^{(0)} = \frac{D}{a + r}$$

und am Rande (im Abstande 90^0 von der Mitte)

$$k_1^{(90)} = \frac{Dr}{a^2}.$$

Macht man $D = a + r$, so wird die Vergrösserung im Mittelpunkte der Karte 1; dies ist auch an und für sich klar, denn die Projektionsebene ist dann tangierende Ebene im Mittelpunkte der Karte; die Umgebung dieses Punktes erscheint also in wahrer Grösse. Mit einer Verschiebung der Projektionsebene wird aber das relative Verhältnis der Kartentheile nicht geändert, und man kann k_1^0 gleich der Einheit, also $\frac{k}{k_1^0}$ als Vergrösserungszahl ansehen, was aber darauf hinauskömmt, $D = a + r$ zu setzen; dann ist:

$$k_1 = \left(1 + \frac{a}{r}\right) \frac{1 + \frac{a}{r}\cos v}{\left(\frac{a}{r} + \cos v\right)^2}$$

oder, wenn $\frac{a}{r} = x$ gesetzt wird

$$k_1 = (1 + x)\frac{x + \cos v}{(x + \cos v)^2},$$

wie schon im vorigen § angegeben wurde; hieraus ist für die Kartenmitte und für die um 90^0 von derselben abstehenden Punkte

$$k_1^{(0)} = 1; \quad k_1^{(90)} = \frac{1 + x}{x^2}.$$

Für die *Lahire*'sche Projektion ist $x = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$, mithin

$$k_1^{(90)} = 8 - 5\sqrt{2} = 0{\cdot}9289320.$$

Am Rande der Karte (bei der Darstellung einer Halbkugel) ist also die Vergrösserung in radialer Richtung nahe dieselbe wie in der Kartenmitte; weiter hinaus wird sie der Natur der Sache nach abnehmen, wie schon aus Fig. 24 folgt; man kann nun auch fragen,

wo ein Maximum der Vergrösserung stattfindet. Es ist

$$\frac{dk_1}{dv} = (1 + x)\,\frac{\sin v\,[2 + x\cos v - x^2]}{(x + \cos v)^3}\,.$$

Ein Maximum tritt also ein, wenn

$$2 + x\cos v' - x^2 = 0,$$

woraus

$$\cos v' = x - \frac{2}{x} \tag{20a}$$

folgt, und der zugehörige Wert der Maximalvergrösserung ist

$$k_1' = \frac{1}{4}\,\frac{x^2}{x - 1}\,. \tag{20b}$$

Für die *Lahire*'sche Projektion ist

$$\cos v' = \frac{5}{2}\sqrt{2} - 3 = 0\cdot5355340; \quad v' = 57^0 37' 11''\!.53$$

$$k_1' = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\sqrt{2} = 1\cdot0303301.$$

Auch dieser Wert der Maximalvergrösserung ist von derjenigen im Kartenmittelpunkte nur wenig verschieden, daher die Parallelkreise überall in nahe derselben Entfernung von einander, was, wie schon pag. 67 bemerkt wurde, als ein grosser Vorteil der Karte anzusehen ist.

Der äusserste darstellbare Parallelkreis ist der Berührungskreis des Tangentialkegels, dessen Spitze im Augpunkte liegt. Seine Poldistanz ist $+ 125^0 51' 31''$ und für ihn ist $k_2' = 2\cdot41422$; $\varrho' = 1\cdot95664\, r$. Die Construktion des Augpunktes ist sehr einfach. Soll A (Fig. 27) der Kartenmittelpunkt sein und sei (K) die Umlegung eines grössten Kreises der Kugel, halbiert man AB in b, CB in c, und zieht bc, so ist OA die Entfernung des Auges von der Projektionsebene; denn zieht man die Projektionsstrahlen Ob, OB bis b', B', so ist $Ab' : AB' = Cc : CB$; daher $Ab' = b'B'$, d. h. die Projektion b' des Halbierungspunktes b eines Bogens AB von 90^0 halbiert die Projektion AB' des letzteren, wie es gefordert wurde.

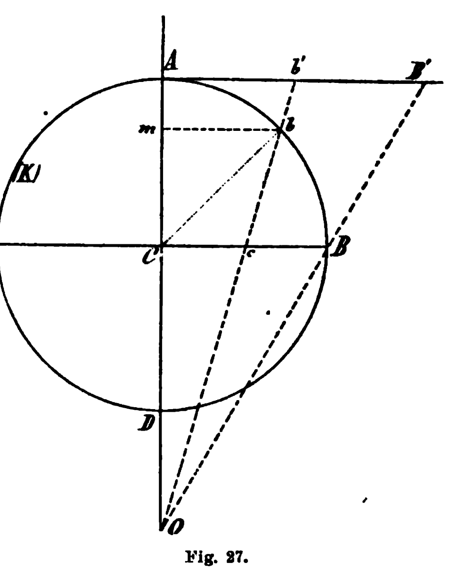


Fig. 27.

Man hat übrigens

$$bm : cC = mO : CO = (mC + CO) : CO,$$

und da

$$bm = mC = \frac{r}{2}\sqrt{2}$$

$$\frac{r}{2}\sqrt{2} : \frac{r}{2} = \left(\frac{r}{2}\sqrt{2} + CO\right) : CO$$

$$\sqrt{2} : 1 = \left(\frac{r}{2}\sqrt{2} + CO\right) : CO$$

und daraus

$$CO = r + \frac{r}{2}\sqrt{2},$$

folglich $DO = CO - r = \frac{r}{2}\sqrt{2} = mb$. Um den Ort O des Auges zu finden hat man also $DO = mb$ zu machen, und dies ist die von *De la Hire* a. a. O. angegebene Construktion.

b) **Parent'sche** Projektion. Wir hatten oben gefunden, dass von $v = 0$ bis zu dem durch

$$\cos v' = x - \frac{2}{x}$$

bestimmten Werte von v' das Vergrösserungsverhältnis von 1 bis zum Werte

$$k_1' = \frac{1}{4}\,\frac{x^2}{x-1}$$

zunimmt. Die hierbei stattfindende Änderung ist demnach

$$\frac{1}{4}\,\frac{x^2}{x-1} - 1.$$

Von $v = v'$ bis $v = 90^0$ nimmt k_1 wieder ab, bis zum Werte $k_1^{(90)} = \frac{1+x}{x^2}$ und ändert sich daher um

$$\frac{1}{4}\,\frac{x^2}{x-1.} - \frac{1+x}{x^2}.$$

Die Gesammtänderung ist demnach

$$A = \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{x-1} - 1 - \frac{1+x}{x^2}.$$

Man kann verlangen, dass x so bestimmt werde, dass diese Gesammtänderung ein Minimum werde; damit dies stattfinde, muss

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 6x + 4}{2x^3(x-1)^2} = 0$$

sein. Setzt man den Zähler gleich Null, so erhält man hiefür zwei Wurzeln; die eine $x = +0{\cdot}7383447$ entspricht keiner externen Projection; die zweite $x = +1{\cdot}6031246$ giebt den Maximalwert $k_1' = 1{\cdot}0650392$, die Vergrösserung am Rande $k_1^{(90)} = 1{\cdot}0129635$; die Gesammtänderung in dem hier gewählten Sinne: $0{\cdot}1171149$. Der äusserste zur Darstellung gelangende Parallelkreis hat die Poldistanz $128^0 35' 33''$ und für ihn ist $k_2' = 2{\cdot}65806$; $\varrho' = 2{\cdot}07751$.

Doch ist dieser Vorgang gewissermassen willkürlich; denn es bleiben allerdings die relativen Lagen und Dimensionen in der Projektionsebene bei einer parallelen Verschiebung derselben ungeändert; allein da hier das Projektionscentrum verschoben wurde, so wird

gleichzeitig der Abstand von der Projektionsebene geändert; mit anderen Worten, es ist D auch variabel. Schreibt man $D = a + p$, wo also p den Abstand der Projektionsebene vom Kugelmittelpunkt bedeutet, so wird:

$$k_1 = (a + p) \frac{r + a \cos v}{(a + r \cos v)^2};$$

also

$$k_1^{(0)} = \frac{a + p}{a + r}; \qquad k_1^{(90)} = (a + p) \frac{r}{a^2},$$

und der Maximalwert für $\cos v' = \frac{a}{r} - 2 \frac{r}{a}$ ist

$$k_1' = \frac{a+p}{r} \cdot \frac{1}{4} \frac{a^2}{a^2 - r^2},$$

folglich die Gesammtänderung im obigen Sinne

$$A' = \frac{a + p}{a + r} \left[\frac{1}{2} \frac{x^2}{x - 1} - 1 - \frac{1 + x}{x^2}\right].$$

Setzt man $\frac{p}{r} = c$, so wird

$$A' = \frac{x + c}{1 + x} \left[\frac{1}{2} \frac{x^2}{x - 1} - 1 - \frac{1 + x}{x^2}\right] = \frac{x + c}{x + 1} A$$

$$\frac{dA'}{dx} = \frac{x + c}{1 + x} \frac{dA}{dx} + \frac{1 - c}{(1 + x)^2} A$$

und die Bedingung des Minimums wird daher

$$(x + c)(x + 1) \frac{dA}{dx} + (1 - c) A = 0.$$

Nur wenn $c = 1$, wird das Resultat das vorhin gefundene.

Für $c = 0$ folgt die Gleichung

$$x^6 - 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 2 = 0.$$

Die eine zwischen 0 und 1 fallende Lösung dieser Gleichung ist auszuschliessen; die zweite ist

$$x = 1{\cdot}5943644.$$

Der äusserste dargestellte Parallelkreis hat die Poldistanz 128° 50′ 40″, und für ihn ist $k_2' = 2{\cdot}68246$, $\varrho' = 2{\cdot}08924\, r$.

Dieser Wert (eigentlich 1·595) wurde von *Parent* in einer Notiz in der Histoire de l'academie 1702, pag. 70 gegeben. Die Werte für ϱ, k, k_2, K und $\frac{\delta}{2}$ können für jeden Wert von x leicht aus Tafel 4 entnommen werden.

c) Man kann die Bedingung stellen, dass die Vergrösserung k_1 in der Mitte der Karte gleich sein soll derjenigen in 90° Entfernung; dann wird:

$$\frac{a + p}{a + r} = (a + p) \frac{r}{a^2},$$

oder

$$x^2 - x - 1 = 0; \qquad x = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = 1{\cdot}6180340.$$

d) Man kann dieselben Aufgaben für die Flächenvergrösserung lösen. Diese ist:

$$K = D^2 \frac{r + a \cos v}{(a + r \cos v)^3},$$

und setzt man $D = a + p$, so ist

$$K = (a + p)^2 \frac{r + a \cos v}{(a + r \cos v)^3},$$

folglich

$$K^{(0)} = \left(\frac{a+p}{a+r}\right)^2; \qquad K^{(90)} = \frac{(a+p)^2 r}{a^3}.$$

Das Maximum der Flächenvergrösserung findet statt, wenn

$$\frac{\partial K}{\partial v} = (a + p)^2 \frac{(3r^2 - a^2) \sin v + 2\, a r \sin v \cos v}{(a + r \cos v)^4} = 0$$

wird, und diess tritt ein für

$$\cos v' = \frac{1}{2} x - \frac{3}{2x}. \tag{21a}$$

Da aber v zwischen 0 und 90° liegt, so muss $\cos v$ jedenfalls positiv sein, demnach $a^2 > 3r^2$, oder $x > \sqrt{3}$.

Der Maximalwert selbst ergiebt sich durch Substitution dieses Wertes von $\cos v'$ in den Ausdruck für K; er wird

$$K' = \frac{4}{27} \frac{(a+p)^2 a^3}{(a^2 - r^2) r}, \tag{21b}$$

und die im angedeuteten Sinne aufgefasste Gesammtänderung der Flächenvergrösserung:

$$A = 2K' - K^{(0)} - K^{(90)}$$

$$A = \left[\frac{8}{27} \frac{x^3}{(x-1)^2} - 1 - \frac{(x+1)^2}{x^3}\right] \left(\frac{x+c}{1+x}\right)^2;$$

für $c = 1$ muss der Klammerausdruck

$$A' = \frac{8}{27} \frac{x^3}{(x-1)^2} - 1 - \frac{(x+1)^2}{x^3}$$

ein Minimum werden, daher

$$\frac{\partial A'}{\partial x} = \frac{8x^7 - 24x^6 + 27x^5 + 27x^4 - 162x^3 + 54x^2 + 135x - 81}{27x^4 (x-1)^3} = 0.$$

Da

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \left[\frac{\partial A'}{\partial x} \left(\frac{x+c}{1+x}\right) + 2A \frac{1-c}{(1+x)^2}\right] \frac{x+c}{1+x}$$

ist, so wird im allgemeinen Falle

$$(1 + x)(x + c) \frac{\partial A'}{\partial x} + 2A(1 - c) = 0$$

werden müssen; die erstere Bedingung giebt die Gleichung

$$8x^7 - 24x^6 + 27x^5 + 27x^4 - 162x^3 + 54x^2 + 135x - 81 = 0,$$

deren Lösung

$$x = 2{\cdot}1554469.$$

Der äusserste zur Darstellung gelangende Parallelkreis hat die Poldistanz 117° 38′ 30″ und für diesen ist

$$k_2' = 1{\cdot}86538$$
$$\varrho' = 2{\cdot}65251\, r.$$

Für $c = 0$ wird die Gleichung

$$8x^8 - 67x^6 + 162x^5 - 243x^4 + 54x^3 + 81x^2 - 27 = 0,$$

deren Lösung

$$x = 2{\cdot}0999458$$

ist. Der äusserste zur Darstellung gelangende Parallelkreis hat die Poldistanz 118° 26′ 16″, und für diesen ist

$$k_2' = 1{\cdot}90914$$
$$\varrho' = 1{\cdot}67877\, r$$

Aus Tafel 4 ersieht man, dass die Entfernung der Parallelkreise der Äquidistanz am nächsten kommt für x nahe 1·8. Die Winkeländerung beträgt hiefür bei 70° Entfernung vom Kartenmittelpunkt noch nicht 10°, bei 100° Entfernung allerdings schon circa 24°; k_1 ist nahe constant: bis etwa 60° für $x = 1{\cdot}8$ mit der grössten Winkeländerung von ungefähr $5^1/_2$°; bis etwa 100° für $x = 1{\cdot}6$. K wird bis etwa 60° nahe constant für $x = 2{\cdot}6$; die Maximalalteration der Winkel beträgt circa $8^1/_2$°; K ist bis 100° nahe unverändert für $x = 2{\cdot}1$. Die Winkeländerung ist bei 70° Entfernung vom Kartenmittelpunkt erst 10°; bei 100° Entfernung allerdings schon circa 30°.

Man sieht also, dass die externen Projektionen, sowol was lineare als auch was Flächenvergrösserung und Winkeländerung betrifft, nicht gar zu schlechte Resultate geben. Wenn sie gleichwol in der Praxis nicht verwendet werden, so liegt der Grund hauptsächlich darin, dass sie nur in *einem Punkte*, dem Kartenmittelpunkte, völlige Identität mit dem Originale geben, während diese bei den gleich zu behandelnden Kegelprojektionen längs einer Linie stattfindet, und weil bei den externen perspektivischen Projektionen die Netzlinien nicht gerade einfach zu verzeichnende Curven sind, und sich nicht rechtwinklig durchschneiden.

II. KAPITEL.

KEGELPROJEKTIONEN.

21. Da die Kugel sich nicht in eine Ebene ausbreiten lässt, so ist eine Abbildung, welche ein völlig getreues Bild der Erdoberfläche oder einzelner Theile derselben giebt, nicht möglich. Man muss sich stets begnügen, ein, *so weit als möglich getreues* Bild zu finden, und dafür ein Kartennetz zu construieren, welches dem Ideal einer völligen Congruenz des Bildes mit dem Originale möglichst nahe zu kommen gestattet. Gleichheit der Maasse in der Richtung der Meridiane, Gleichheit der Maasse in der Richtung der Parallelkreise, Gleichheit der Flächen, unveränderte Übertragung der Winkel von der Kugel auf die Karte, sind Eigenschaften, welche bei einer völlig getreuen Abbildung stattfinden müssen, welche aber, der Natur der Sache nach, nicht gleichzeitig erfüllt werden können. Die perspektivischen Projektionen haben diese Eigenschaften der grossen Mehrzahl nach gar nicht oder einzelne nur genähert, andere gar nicht, und wenn es sich darum handelt, grössere Ländercomplexe bei stärkerer Vergrösserung darzustellen, so werden sich bedeutende Übelstände bemerkbar machen. Man kann jedoch ein genaueres Abbild der Erdoberfläche herstellen, wenn man statt der Ebene eine sich der Kugel besser anschmiegende Fläche zu Grunde legt, also z. B. eine die Kugel berührende oder schneidende Kegelfläche, und diese dann, nachdem sie längs einer Erzeugenden aufgeschnitten wurde, in die Ebene ausbreitet. Dabei ist ein nicht zu unterschätzender Vorteil darin gelegen, dass man die Karte beliebig nach Osten und Westen fortsetzen kann, da die Verhältnisse längs eines Parallelkreises unverändert bleiben, was bei den perspektivischen Projektionen nicht der Fall ist. Man kann dabei die Kugeltheile direkt perspektivisch auf den Kegel projicieren; man erhält eine noch bessere Übereinstimmung zwischen Bild und Original, wenn man auch diese Beschränkung fallen lässt, und nach gewissen Vorschriften, welche meist die perspektivische Übertragung ausschliessen, z. B. dass die Maasse längs der Meridiane auf dem Bilde gleich sein sollen denjenigen auf dem Originale — ein Bild der Kugel auf dem Kegel herstellt. Im Grunde genommen, könnte man direkt diese Übertragung auf die Ebene ohne Vermittlung des Kegels vornehmen; denn wählt man irgend ein, sonst natürlich beliebiges Gesetz, durch

welches z. B. die Form und Entfernung der Parallelkreise und Meridiane gegeben ist, und zeichnet dieselben darnach in die Karte ein, so erhält man ein Kartennetz, ganz unabhängig davon, auf welche Weise man zum angenommenen Gesetze geführt wurde. Im allgemeinen aber ist der Übergang auf den Kegel, wenn auch nicht nötig, so doch für die Anschaulichkeit und Interpretation der hier auftretenden mathematischen Gesetze wesentlich fördernd.

Der Kegelmantel, auf welchen die Erde zunächst abgebildet wird, wird immer als Kreiskegel angenommen, dessen Axe mit der Erdaxe zusammenfällt; die Meridiane müssen dann notwendig als gerade Linien erscheinen, die von der Spitze des Kegels auslaufen; die Parallelkreise als Kreise, deren Mittelpunkt die Kegelspitze ist. Damit ist bereits der eine grosse Vortheil erreicht, dass gleichen Längendifferenzen auf der Karte auch gleiche Längendifferenzen auf der Kugel entsprechen, und dass sich die Netzcurven, die einfach zu zeichnende Linien sind, so wie auf dem Originale unter rechten Winkeln schneiden.[1])

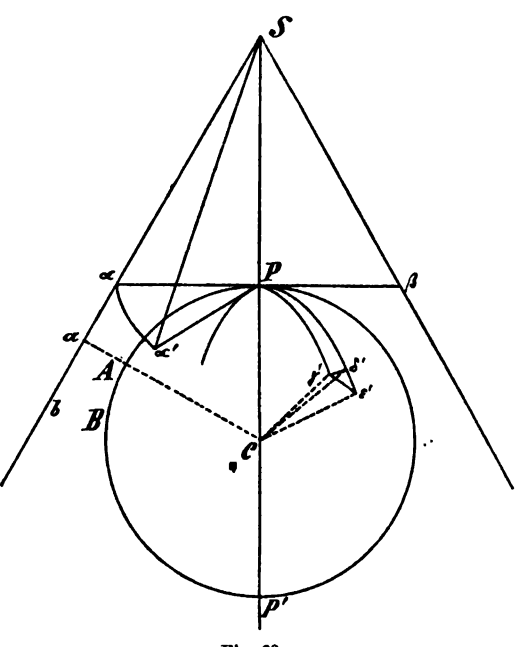


Fig. 28 a.

Denken wir uns zunächst auf einem Kegel, dessen Spitze S (Fig. 28 a) wir in der Verlängerung der Erdaxe PP' annehmen[2]), die Meridiane so abgetragen, dass gleichen Längendifferenzen auf der Kugel auch gleiche Winkel zwischen den die Meridiane darstellenden von S ausgehenden Erzeugenden entsprechen. Einem Längenunterschiede λ zweier Meridiane, welcher durch den Winkel $\alpha P \alpha'$ der im Pole an dieselben gezogenen Tangenten gemessen wird,

1) Mitunter zählt man gewisse Formen, in denen diese Fundamentaleigenschaften um anderer wichtiger Eigenschaften willen aufgegeben wurden, auch noch fälschlich zu den Kegelprojektionen, oder bezeichnet sie als modificierte Kegelprojektionen; so z. B. die *Sanson'sche*, die *Werner'sche*, die *Ptolemäische* Äquivalente etc.

2) Und zwar auf Seite des Nordpols; da für den Südpol dieselben Formen für die Abbildung der südlichen Hemisphäre auftreten.

entspricht der Winkel Θ zwischen den zugehörigen Erzeugenden, welcher, wenn der Kegel längs irgend einer Erzeugenden aufgeschnitten, und in die Ebene ausgebreitet wird, ungeändert bleibt. Der Längendifferenz $\lambda = 360^0$ entspricht der auf dem Kegelmantel gemessene Winkel an der Spitze, und es wird ganz allgemein Θ der Längendifferenz λ proportional sein, d. h.

$$\Theta = m\lambda,$$

wobei aber $m < 1$ sein muss, weil Θ stets kleiner als λ ist. Um den Wert von m zu bestimmen, denken wir uns den Kegel durch eine auf seiner Axe z. B. in P senkrecht stehende Ebene geschnitten. Der auf dem Kegel abgeschnittene Bogen zwischen den beiden Meridianen von der Längendifferenz λ ist dann

$$s = P\alpha \cdot \lambda,$$

oder auch, wie man aus der Abwicklung leicht erkennt:

$$s = S\alpha \cdot \Theta;$$

es wird demnach

$$P\alpha \cdot \lambda = S\alpha \cdot \Theta,$$

oder

$$\Theta = \frac{P\alpha}{S\alpha}\,\lambda = \lambda \sin\gamma,$$

daher

$$m = \sin\gamma,$$

wenn γ der zwischen einer Erzeugenden und der Kegelaxe enthaltene Winkel αSP ist.

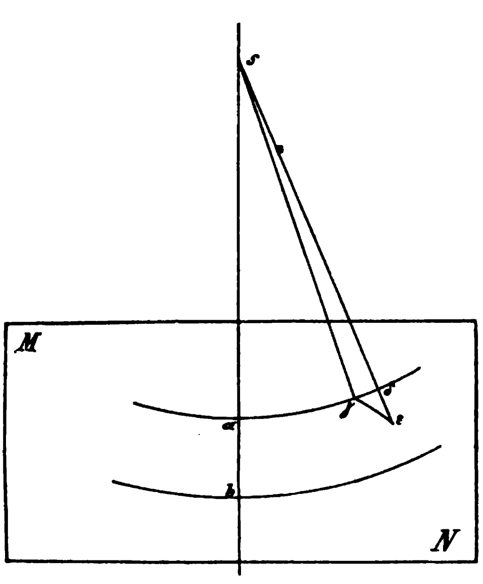


Fig. 28b.

Sei A der Mittelpunkt des darzustellenden Flächenteiles, a sein Bild, also der Mittelpunkt der Karte und sei der Halbmesser von a gleich a, also $Sa = a$. Nach der Abwicklung sei (Fig. 28b) a der Kartenmittelpunkt, s die Spitze des Kegels, welche im allgemeinen nicht mehr auf das Kartenblatt MN fallen wird; dann ist auch

$$sa = a;$$

sei ferner b das Bild eines anderen Punktes B, und

$$Sb = sb = \varrho,$$

so wird $\varrho = a + x$ und x wird offenbar eine in jedem speciellen Falle gegebene Funktion der Differenz der Polhöhen von A und B sein; ist diese Differenz e,

also arc $AB = e$[1]), wenn beide auf demselben Meridian gedacht werden, so wird $x = f(e)$, demnach

$$\varrho = a + f(e).$$

Es sind demnach die Hauptgleichungen der Kegelprojektionen

$$\left.\begin{aligned} \Theta &= m\lambda \\ \varrho &= a + f(e) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV)}$$

wobei $m = \sin\gamma$ ist.

Wenn $f(e)$ eine Funktion ist, die den analytischen Ausdruck dafür enthält, dass a, b, etc. perspektivische Projektionen von A, B sind, so hat man den Kegel in fester, organischer Verbindung mit der Kugel anzunehmen. Entspricht aber $f(e)$ dieser Beziehung nicht, so hat man sich den Kegel von der Kugel getrennt zu denken, worauf noch an entsprechender Stelle aufmerksam gemacht wird.

Ist die Poldistanz des Mittelpunktes der Karte gleich Null, so geht der Kegel in eine die Kugel im Pole berührende Ebene über; für diese wird also, wenn p die Poldistanz eines Punktes ist,

$$\left.\begin{aligned} \Theta &= \lambda \\ \varrho &= f(p) \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(IV a)}$$

wobei p eine für $p = 0$ verschwindende Funktion ist. Man wählt aber im letzteren Falle, wo der Kegel in eine die Kugel berührende Ebene übergeht, nicht immer den Pol zum Mittelpunkte der Karte, sondern irgend einen anderen Punkt, dessen geographische Breite α sei. Solche Projektionen haben die Eigenschaft, dass alle Punkte, welche auf der Kugel in einem Kreise liegen, dessen Mittelpunkt der angenommene Kartenmittelpunkt ist, auch auf der Karte gleichweit vom Kartenmittelpunkte entfernt sind. Man nennt solche Projektionen *zenitale Abbildungen.*[2]) Ist in einer solchen v der Abstand eines Punktes vom Kartenmittelpunkte, und $\varrho = f(v)$, so werden die Meridiane und Parallelkreise nicht mehr einfach zu zeichnende Curven sein. Es wird dann am besten nicht diese Curven einzutragen, sondern für einen einzuzeichnenden Punkt P die geographischen Coordinaten (Länge und Breite) in zenitale Coordinaten: Entfernung v vom Kartenmittelpunkt, und Azimut dieser Richtung (Winkel u mit dem Meridian von A) umzusetzen. Ist Q der Pol, A der Kartenmittelpunkt, P der einzutragende Punkt, dessen geographische Coordinaten, Länge λ, Breite φ, dessen zenitale Entfernung AP vom Kartenmittelpunkt v, Azimut $QAP = u$ sind, so hat man

$$\left.\begin{aligned} \cos v &= \sin\alpha \sin\varphi + \cos\alpha \cos\varphi \cos\lambda \\ \sin u &= \frac{\sin\lambda \cos\varphi}{\sin v} \end{aligned}\right\}.$$

---

1) Also $e = \beta - \varphi$, wenn β, φ bez. die geogr. Breiten des Kartenmittelpunktes und eines anderen Punktes sind.

2) Zu diesen gehören als spezielle Fälle alle im I. Kapitel behandelten (perspektivischen) Projektionen; sowie auch einige in den §§ 25, 27, 39 etc. angeführten.

Liegt der Kartenmittelpunkt auf dem Äquator, so wird $\alpha = 0$, und

$$\cos v = \cos \varphi \cos \lambda$$

$$\operatorname{tg} u = \sin \lambda \cot \varphi.$$

Zur raschen Berechnung von u und v dient Tafel 5, welche deren Werte mit den beiden Argumenten φ und λ giebt.

Ist die Poldistanz des Kartenmittelpunktes 90°, also der Mittelpunkt der Karte ein Punkt des Äquators, so geht der Kegel in einen Cylinder über; es wird

$$m = 0, \quad \varrho = \infty.$$

In diesem Falle werden also die Gleichungen (IV) unbrauchbar. Man sieht aber sofort, dass dann die Meridiane durch äquidistante parallele Gerade dargestellt werden, und die Parallelkreise ebenfalls durch parallele Gerade, senkrecht zu ersteren. Es wird dann am besten jeden Punkt durch seine rechtwinkligen Coordinaten zu bestimmen, und es soll das Axensystem so gewählt werden, das die X-axe in den Äquator, die Y-axe in den ersten Meridian fällt. Die Wahl der Dimensionen ist beliebig; man kann nachhinein den Radius der abzubildenden Kugel (des Globus) so wählen, dass der Cylinder die Kugel im Äquator berührt, oder aber, wenn der Massstab der Karte vorgeschrieben ist, den Kugelradius darnach annehmen.

Aus der Beziehung, dass die Masse längs des Äquators auf der Karte und auf der Kugel gleich sein sollen, folgt

$$x = r\lambda,$$

und da der Abstand des Paralleles von dem Äquator in der Karte eine Funktion der geographischen Breite φ ist, so wird

$$y = r \cdot f(\varphi)$$

und es sind demnach die allgemeinen Gleichungen dieser sogenannten *Cylinderprojektionen*:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\lambda \\ y &= rf(\varphi) \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(V)}$$

Die Meridiane und Parallelkreise in der Karte bilden hier ein Netz von sich rechtwinklig durchschneidenden Geraden, also von rechteckigen (unter Umständen quadratischen) Maschen, welches sehr leicht zu zeichnen ist. Man pflegt solche, durch Abwicklung eines Cylinders entstehende Karten wohl auch *Plattkarten* zu nennen.

Auch hier findet man Cylinderprojektionen, bei denen der Cylinder nicht den Äquator, sondern einen anderen grössten Kreis berührt. Dann gelten dieselben Gleichungen (V), nur werden λ, φ eine andere Bedeutung haben; es ist nämlich λ der auf dem Berührungskreise gemessene Bogen und φ der Abstand des Punktes von diesem Berührungskreise, also in der vorhin gewählten Bezeichnung:

$$\left.\begin{aligned} x &= ru \\ y &= rf(v) \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(V a)}$$

22. Um auch für die Kegelprojektionen das Vergrösserungsverhältnis und die Grösse der Winkeländerung in einem gegebenen Punkte zu finden, hat man zu beachten, dass einer Änderung $\gamma' P \delta' = d\lambda$ auf der Karte eine Änderung $\gamma s \delta = m\, d\lambda$, und einer Änderung $\delta' C \varepsilon' = d\varphi$ auf der Karte eine Änderung $\delta \varepsilon = d\varrho$ entspricht, und es ist

$$\delta s \gamma = d\Theta = m\, d\lambda$$
$$\delta \varepsilon = d\varrho = f'(e) de,$$

also

$$dS^2 = \gamma\delta^2 + \delta\varepsilon^2 = (\varrho\, d\Theta)^2 + d\varrho^2 = (\varrho\, m\, d\lambda)^2 + (f'(e)\, de)^2.$$

Auf der Kugel ist

$$ds^2 = \gamma'\delta'^2 + \delta'\varepsilon'^2 = (r \cos(\beta - e)\, d\lambda)^2 + (r\, de)^2,$$

folglich

$$\left(\frac{dS}{ds}\right)^2 = \frac{[a + f(e)]^2 m^2 d\lambda^2 + f'(e)^2 de^2}{r^2 \cos(\beta - e)^2 d\lambda^2 + r^2 de^2}.$$

Es ist ferner, wenn die Azimute $P\gamma'\varepsilon' = \omega$, $s\gamma\varepsilon = \omega'$ von der Richtung nach dem Pole zu im Sinne des Zeigers einer Uhr gezählt werden,

$$\operatorname{tg} \omega = -\frac{\delta'\gamma'}{\delta'\varepsilon'} = -\frac{r \cos(\beta - e)\, d\lambda}{r\, de} = -\cos(\beta - e) \frac{d\lambda}{de},$$

also

$$\frac{d\lambda}{de} = -\frac{\operatorname{tg} \omega}{\cos(\beta - e)},$$

folglich

$$\left(\frac{dS}{ds}\right)^2 = \frac{[a + f(e)]^2 m^2 \dfrac{\operatorname{tg} \omega^2}{\cos(\beta - e)^2} + f'(e)^2}{r^2 \operatorname{tg} \omega^2 + r^2}$$

also

$$k^2 = \left(\frac{a + f(e)}{r \cos(\beta - e)}\right)^2 m^2 \sin \omega^2 + \left(\frac{f'(e)}{r}\right)^2 \cos \omega^2 \qquad \text{(VI)}$$

In der Richtung der Meridiane[1]), d. h. für $\omega = 0$ wird das Vergrösserungsverhältnis

$$k_1 = \frac{f'(e)}{r},$$

in der darauf senkrechten Richtung, für $\omega = 90^0$ wird es

$$k_2 = m \frac{a + f(e)}{r \cos(\beta - e)},$$

und allgemein

$$k^2 = k_1^2 \cos \omega^2 + k_2^2 \sin \omega^2.$$

Für die Flächenvergrösserung folgt hieraus:

$$K = k_1 k_2 = \frac{a + f(e)}{r \cos(\beta - e)} \frac{m \cdot f'(e)}{r}.$$

Das Azimut der entsprechenden Richtung auf der Karte ist bestimmt durch

$$\operatorname{tg} \omega' = -\frac{\gamma\delta}{\delta\varepsilon} = -\frac{\varrho\, d\Theta}{d\varrho} = -\frac{\varrho m}{f'(e)} \frac{d\lambda}{de},$$

1) Der Massstab der Karte ist wieder $\frac{r}{R} k$; siehe § 4.

also

$$\operatorname{tg} \omega' = \frac{m[a + f(e)]}{f'(e) \cos(\beta - e)} \operatorname{tg} \omega, \tag{VII}$$

woraus sich auch noch ergiebt

$$\operatorname{tg} \omega' = \frac{k_2}{k_1} \operatorname{tg} \omega.$$

Um den Maximalwert der Richtungsänderung zu finden, hat man

$$\frac{d(\omega' - \omega)}{d\omega} = \frac{d\omega'}{d\omega} - 1 = 0$$

zu setzen. Die Lösung geht aus der § 4 erhaltenen hervor, wenn man

$$m = \frac{k_1}{k_2}$$

setzt; es ist daher

$$\sin(\omega' - \omega) = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}$$

$$\cos 2\omega = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1};$$

demnach, wenn die grösste Winkeländerung wieder mit δ bezeichnet wird, also $\omega' - \omega = \frac{\delta}{2}$ ist

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{m[a + f(e)] - f'(e) \cos(\beta - e)}{m[a + f(e)] + f'(e) \cos(\beta - e)}. \tag{VII'}$$

Für Cylinderprojektionen ist auf der Karte:

$$dx = r\,d\lambda$$
$$dy = r f'(\varphi)\,d\varphi$$
$$dS^2 = r^2 d\lambda^2 + r^2 f'(\varphi)^2 d\varphi^2,$$

und auf der Kugel, weil $\beta = 0$, $\varphi = e$ ist

$$ds^2 = r^2 \cos\varphi^2 d\lambda^2 + r^2 d\varphi^2,$$

daher

$$\left(\frac{dS}{ds}\right)^2 = \frac{1 + f'(\varphi)^2 \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2}{\cos\varphi^2 + \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2}$$

$$\operatorname{tg} \omega' = \frac{dx}{dy} = -\frac{d\lambda}{f'(\varphi) d\varphi},$$

und da

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = -\frac{\operatorname{tg} \omega}{\cos\varphi},$$

so ist

$$k^2 = \frac{1 + f'(\varphi)^2 \frac{\cos\varphi^2}{\operatorname{tg}\omega^2}}{\cos\varphi^2 + \cos\varphi^2 \cot\omega^2} = \frac{1}{\cos\varphi^2} \sin\omega^2 + f'(\varphi)^2 \cos\omega^2;$$

und daraus

$$\left.\begin{array}{ll} k_1 = f'(\varphi) & \\ k_2 = \dfrac{1}{\cos\varphi} & k^2 = k_1^2 \cos\omega^2 + k_2^2 \sin\omega^2 \\ K = \dfrac{f'(\varphi)}{\cos\varphi} & \end{array}\right\} \tag{VIII}$$

$$\operatorname{tg} \omega' = \frac{\operatorname{tg} \omega}{f'(\varphi) \cos \varphi}, \tag{IX}$$

und wenn hier wieder $f'(\varphi) \cos \varphi$ mit der in § 4 mit m bezeichneten Grösse identificiert wird:

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{1 - f'(\varphi) \cos \varphi}{1 + f'(\varphi) \cos \varphi}. \tag{IX'}$$

23. Die Hauptgleichungen (IV) der Kegelprojektionen enthalten zwei Constante, m und a, und eine bisher unbestimmt gelassene Funktion f, durch deren spezielle Beschränkung man eine grosse Zahl von Projektionsmethoden erhalten kann.

A) Die Kegelprojektion sei eine perspektivische, also durch perspektivisches Projicieren der Kugel auf den Kegel und nachherige Ausbreitung des letzteren in eine Ebene entstanden. Sei C (Fig. 29) der Mittelpunkt der Kugel vom Halbmesser $CA = r$, CS die Kegelaxe, in dieser der Augpunkt (das Projektionscentrum) O in der Enfernung

$$CO = D.$$

Sei ferner A der Mittelpunkt des darzustellenden Flächentheiles, der durch den Projektionsstrahl OA bestimmte Punkt a der Mittelpunkt der Karte, das Perpendikel[1])

$$Cp = d.$$

Fig. 29.

Da $\sphericalangle\, CSp = \gamma = ACB = \beta$, wenn β die geographische Breite des Kartenmittelpunkts ist, so wird

$$m = \sin \beta.$$

Für einen Punkt M, für welchen die geographische Breite $MCB = \varphi$ ist, hat man

$$Sm : SO = \sin SOm : \sin SmO;$$

es ist aber

$$SO = SC + CO = d \operatorname{cosec} \beta + D$$

$$\operatorname{tg} SOm = \frac{r \cos \varphi}{D + r \sin \varphi}$$

$$SmO = 180 - (\beta + SOm)$$

$$\sin SOm = \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{D^2 + r^2 + 2 Dr \sin \varphi}}, \quad \cos SOm = \frac{D + r \sin \varphi}{\sqrt{D^2 + r^2 + 2 Dr \sin \varphi}}$$

$$\sin SmO = \sin (\beta + SOm) = \frac{\sin \beta (D + r \sin \varphi) + \cos \beta \,.\, r \cos \varphi}{\sqrt{D^2 + r^2 + 2 Dr \sin \varphi}},$$

1) Wobei also vorausgesetzt ist, dass der Kegelmantel so liegt, dass die Erzeugende des Kartenmittelpunktes senkrecht steht zum Radius des Mittelpunktes des darzustellenden Flächentheiles.

daher

$$Sm = \varrho = (D + d \operatorname{cosec} \beta) \frac{\sin SOm}{\sin SmO}$$

$$\varrho = (D + d \operatorname{cosec} \beta) \frac{r \cos \varphi}{D \sin \beta + r \cos (\beta - \varphi)}.$$

Da für den Mittelpunkt der Karte $\beta = \varphi$, so wird für diesen

$$a = (D + d \operatorname{cosec} \beta) \frac{r \cos \beta}{D \sin \beta + r}.$$

Die Gleichungen für diese Projektionen werden daher

$$\left.\begin{array}{ll} \Theta = m\lambda & m = \sin\beta \\ \varrho = (D + d \operatorname{cosec} \beta) \dfrac{r \cos (\beta - e)}{D \sin \beta + r \cos e} & \end{array}\right\}. \qquad (22)$$

Zur Bestimmung der Vergrösserung und Winkeländerung hätte man eigentlich $\varrho - a = f(e)$ zu bilden, da aber a von e unabhängig ist, so wird

$$f'(e) = \frac{d\varrho}{de},$$

folglich hier

$$f'(e) = (D + d \operatorname{cosec} \beta) \frac{r \sin \beta (D \sin (\beta - e) + r)}{(D \sin \beta + r \cos e)^2},$$

also:

$$\left.\begin{array}{l} k_1 = (D \sin \beta + d) \dfrac{D \sin (\beta - e) + r}{(D \sin \beta + r \cos e)^2} \\ k_2 = \dfrac{(D \sin \beta + d)}{(D \sin \beta + r \cos e)}\,;\ K = (D \sin \beta + d)^2 \dfrac{D \sin (\beta - e) + r}{(D \sin \beta + r \cos e)^3} \end{array}\right\} \qquad (23)$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} \omega' = \dfrac{D \sin \beta + r \cos e}{D \sin (\beta - e) + r} \operatorname{tg} \omega \\ \sin \dfrac{\delta}{2} = \operatorname{tg} \dfrac{e}{2} \dfrac{\cos\left(\beta - \frac{e}{2}\right) - \frac{r}{D} \sin \frac{e}{2}}{\sin\left(\beta - \frac{e}{2}\right) + \frac{r}{D} \cos \frac{e}{2}} \text{ [1]} \end{array}\right\} \qquad (24)$$

a) Macht man $D = 0$, so fällt das Projektionscentrum in den Kugelmittelpunkt. Die Gleichungen werden

$$\left.\begin{array}{ll} \Theta = m\lambda & m = \sin\beta \\ \varrho = d \operatorname{cosec} \beta \,.\, \dfrac{\cos (\beta - e)}{\cos e} = d (\cot \beta + \operatorname{tg} e) & \end{array}\right\} \qquad (22\text{a})$$

---

1)
$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{(D \sin \beta + r \cos e) - (D \sin (\beta - e) + r)}{D \sin \beta + r \cos e + D \sin (\beta - e) + r}$$
$$= \frac{D [\sin \beta - \sin (\beta - e)] - r (1 - \cos e)}{D [\sin \beta + \sin (\beta - e)] + r (1 + \cos e)}$$
$$= \frac{\sin \frac{e}{2} \cos\left(\beta - \frac{e}{2}\right) - \frac{r}{D} \sin \frac{e}{2}^2}{\cos \frac{e}{2} \sin \left(\beta - \frac{e}{2}\right) + \frac{r}{D} \cos \frac{e}{2}^2}$$
$$= \operatorname{tg} \frac{e}{2} \cdot \frac{\cos\left(\beta - \frac{e}{2}\right) - \frac{r}{D} \sin \frac{e}{2}}{\sin\left(\beta - \frac{e}{2}\right) + \frac{r}{D} \cos \frac{e}{2}}$$

$$k_1 = \frac{d}{r \cos e^2}; \quad k_2 = \frac{d}{r \cos e}; \quad K = \frac{d^2}{r^2 \cos e^3} \tag{23a}$$

$$\operatorname{tg} \omega' = \cos e \operatorname{tg} \omega; \quad \sin \frac{\delta}{2} = \operatorname{tg} \frac{e}{2}^{2}\ ^{1)} \tag{24a}$$

Murdoch (Philos. Transact. Bd. 50. Theil II. für das Jahr 1758, London 1759) sucht eine solche perspektivische Projektion, dass für dieselbe die Gesammtfläche der Zone erhalten bleibe[2]. Sind die Breiten der äussersten Parallelkreise φ_1, φ_2, so wird die Fläche der Kugelzone

$f = 2r\pi \,.\, h = 2r^2\pi(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)$,

wenn h die Höhe $\alpha\beta$ (Fig. 30) der zwischen den Parallelen von A und B enthaltenen Zone ist. Die Fläche des Bildes (des Kegelmantels) ist

$$f_1 = 2\pi s \,.\, \varrho',$$

wenn $s = ab$ die Seite des Kegelstutzen und ϱ' der Halbmesser mq des mittleren Schnittes ist. Natürlich muss hier der Kegel die Kugel schneiden; denn läge er ganz ausserhalb, so wäre die Fläche der Projektion jedenfalls grösser. Da $am = mb$, so ist m Kartenmittelpunkt, demnach $Sm \perp Cm$, folglich auch $mn = no$, wenn n, o die Schnittpunkte einer Erzeugenden des Kegels mit der Kugel sind. Ist M derjenige Punkt der Kugel, dessen perspektivische Projektion m ist, so wird auch $AM = MB$ sein.

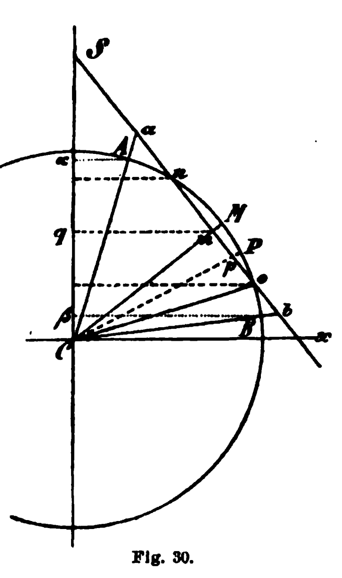


Fig. 30.

Es ist aber

$$\varrho' = mq = Cm \sin mCq = Cm \sin \left[90 - \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$$
$$= Cm \cos \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$s = ab = 2am = 2Cm \operatorname{tg} MCA = 2Cm \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)$$

und da der Voraussetzung gemäss

$$f = f_1$$

sein soll, so muss:

$$4r^2\pi \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = 4\pi Cm^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) \cos \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$$

sein; demnach

$$Cm = r \sqrt{\cos \tfrac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

1) Ohne Rücksicht auf das Zeichen.

2) Diese Projektion ist, da nur die *Gesammtfläche* erhalten bleibt, nicht aber die Verhältnisse beliebiger Flächenstücke, keine äquivalente.

und

$$Sm = Cm \cot \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Die Gleichungen dieser Projektion sind also, weil $\sphericalangle\, mSC = 90 - SCM$,

$$\Theta = m\lambda,\ m = \sin\gamma = \sin\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$a = r \cot \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) \sqrt{\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)}\,.$$

Ist φ die geographische Breite eines Punktes P, dessen perspektivische Kegelprojektion p ist, so ist

$$\sphericalangle\, mCp = xCM - xCp = \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) - \varphi$$

$$mp = Cm \operatorname{tg} mCp \text{ und } \varrho = a + mp, \text{ folglich}$$

$$\varrho = a + r \operatorname{tg} e \sqrt{\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Thatsächlich jedoch hat diese Aufgabe nur ein theoretisches Interesse ohne praktischen Wert; denn da man ohnedies nicht die Erdkugel selbst, sondern ein ihr völlig ähnliches verkleinertes Abbild der Darstellung zu Grunde legt, so kann man ja dieses letztere beliebig gross wählen, und gleich als Kugel mit dem Halbmesser Cm beschreiben; der Kartenmassstab bleibt dabei auch ungeändert, denn die Projektionsstrahlen, also auch ihre Schnittpunkte mit dem Kegel Sab bleiben dieselben [1]). Wählt man die Kugel so, dass der Kegel berührt wird, so wird man in den allgemeinen Gleichungen, $d = r$ zu setzen haben.

Für den vorliegenden Fall entsteht dann

$$\Theta = m\lambda,\quad m = \sin\beta$$

$$\varrho = r(\cot\beta + \operatorname{tg} e)$$

$$k_1 = \frac{1}{\cos e^2};\ k_2 = \frac{1}{\cos e};\ K = \frac{1}{\cos e^3}.$$

Stellt r den Halbmesser der Erdkugel selbst vor, d den Abstand des Kegelmantels von dem Mittelpunkte der der Abbildung zu Grunde gelegten Kugel, im selben Masse ausgedrückt, so ist k_1, k_2, in Formeln (23a) der Massstab der Karte in einem gegebenen Punkte in der Richtung der Meridiane und der Parallelkreise (s. die Bemerkung § 22).

Die Vergleichung mit § 14 lehrt, dass die Werte von k_1, k_2, K, $\frac{\delta}{2}$ ebenfalls aus Tafel 2 entnommen werden können; nur bedeuten

1) Hierauf hat übrigens schon *Lambert* in seinen „Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik" III. pag. 140, aufmerksam gemacht. Auf zwei andere Methoden von *Murdoch*, die wol von ebenso geringem praktischen Werte sind, gehen wir nicht ein, und können dieselben am angeführten Orte nachgesehen werden.

hier die entnommenen Zahlen nicht die Vergrösserungen und Winkeländerungen in der Entfernung e vom Kartenmittelpunkte, sondern längs eines Parallelkreises, dessen Abstand vom mittleren Parallel e ist. Gegenüber der centralperspektivischen Horizontalprojektion, hat aber die centralperspektivische Kegelprojektion den Vorzug, 1) dass das Vergrösserungsverhältnis nicht nur in einem Punkte (dem Berührungspunkte) sondern längs einer ganzen Linie (dem mittleren Parallel) gleich 1 ist, und 2) dass die Netzlinien äusserst einfach zu zeichnen sind.

Selbst im allgemeinen Falle (D beliebig) wird die Herstellung des Kartennetzes sehr leicht. Sei a (Fig. 31) der Kartenmittelpunkt, dessen Breite β, aS das Bild des ersten Meridians, dessen Ebene senkrecht zur Zeichnungsfläche stehe. Breitet man den Kegel in der Zeichnungsfläche aus und schneidet den darzustellenden Flächentheil aus, so entsteht das Kartenblatt MN; um die Parallelkreise einzuzeichnen legen wir den Meridian um; der Kugelmittelpunkt kömmt nach (C) und wenn $a(C)P = 90 - \beta$ und $CO = D$ gemacht wird, so ist S der Mittelpunkt der Parallelkreise, (O) das umgelegte Projektionscentrum. Der Schnitt der Projektionsstrahlen $(O)(p)$ mit Sa bestimmt den Halbmesser Sp' des Parallels.

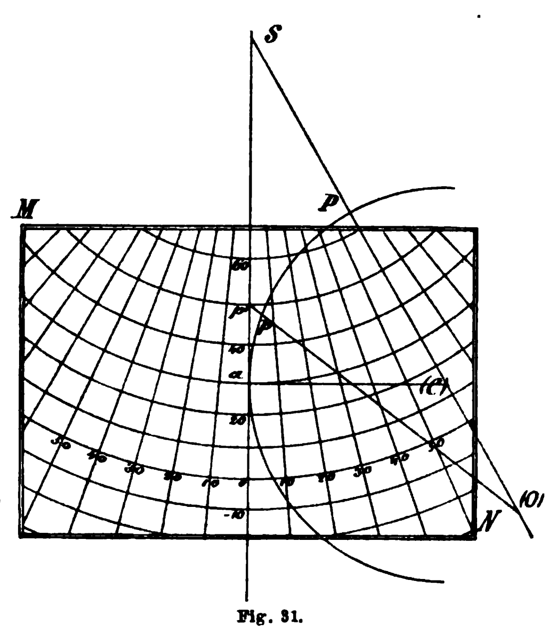


Fig. 31.

Trägt man sich auf einem der Parallelkreise der Karte z. B. auf dem Äquator die Bögen $\varrho\Theta = \varrho\lambda \sin\beta$ auf, und verbindet mit S, so erhält man die Bilder der Meridiane. Es genügt natürlich einen Meridian auf diese Art zu zeichnen, um die übrigen durch Theilung und Auftragen des eingeschlossenen Winkels zu erhalten. Hiezu dient die Tafel 6, welche die Werte $10^0 \sin\beta$ für β von 10^0 zu 10^0 sowol im Grad- als auch im Bogenmass enthält. In Fig. 31 ist $\beta = 30^0$, daher hat man für die Längendifferenz von 60^0 den Winkel bei S gleich 30^0; theilt man also den Winkel $(O)Sa$ in sechs Theile, so stellen die Theilungslinien die Meridiane dar. Ist $\beta = 0$, geht also

der Kegel in einen Cylinder über, so erhält man für eine perspektivische Cylinderprojektion aus dem Centrum

$$x = r\lambda$$
$$y = r \operatorname{tg} \varphi$$

und da

$$f(\varphi) = \operatorname{tg} \varphi;\ f'(\varphi) = \frac{1}{\cos \varphi^2},$$

so wird

$$k_1 = \frac{1}{\cos \varphi^2};\ k_2 = \frac{1}{\cos \varphi};\ K = \frac{1}{\cos \varphi^3}$$
$$\operatorname{tg} \omega' = \cos \varphi \,.\, \operatorname{tg} \omega.$$

Das Zeichnen dieser Kartennetze ergiebt sich aus Fig. 32 ohne Mühe. Der erste Meridian wird wieder umgelegt, und ist $a(O)m = \varphi$,

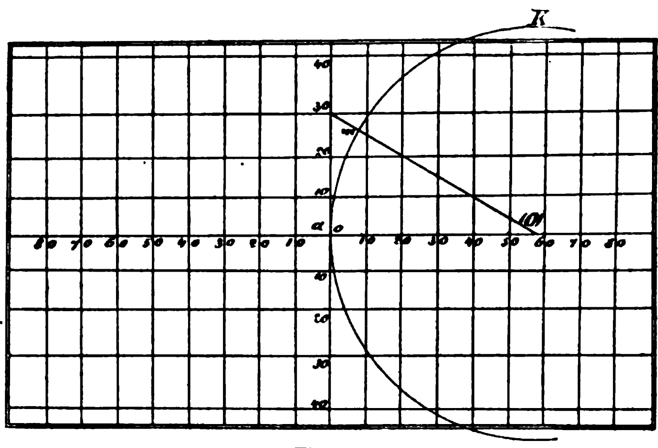


Fig. 32.

so bestimmt $(O)m$ auf dem ersten Meridiane den Punkt des Parallels der Breite φ. — Um die Meridiane zu erhalten, hat man den zu dem Halbmesser $(O)a$ gehörigen Bogen von etwa 90° aufzutragen und in neun Theile zu theilen. Ist der Massstab der Karte nicht gross, so wird es meist genügen die Länge von 10° des Kreises K auf den Äquator wiederholt abzutragen. Ist eine grössere Genauigkeit erforderlich, so kann man die Tafel der Bögen der einzelnen Grade (Taf. 8) benützen.

Braun[1]) schlägt vor für die Kegelprojektion $\beta = \pm 30^0$ und $D = r$ zu nehmen, und *Tissot*[2]) nennt diese Manier *stereographische Kegelprojektion.*

Macht man überdies auch $d = r$, so wird wenn $\beta = 90 - p_0$ gesetzt wird, also p_0 die Poldistanz des Kartenmittelpunktes bedeutet:

---

1) *Heis* Wochenschrift für Astronomie. 1867. pag. 259, 267 und 276.

2) Mémoire sur la réprésentation des surfaces et les projections des cartes géographiques pag. 91.

$$\Theta = \frac{1}{2}\lambda;\ \sin\beta = \frac{1}{2},\ \cos\beta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\varrho = 3r \cdot \frac{\cos(\beta - e)}{\sin\beta + \cos e} = 3r\frac{\sin(p_0 + e)}{\cos p_0 + \cos e} = 3r\frac{\sin\frac{p_0 + e}{2}}{\cos\frac{p_0 - e}{2}}$$

$$k_1 = \frac{3}{2}\frac{1 + \cos(p_0 + e)}{(\cos p_0 + \cos e)^2} = \frac{3}{4}\frac{1}{\cos^2\frac{p_0 - e}{2}}$$

$$k_2 = \frac{3}{2}\frac{1}{\cos p_0 + \cos e} = \frac{3}{4}\frac{1}{\cos\frac{p_0 + e}{2}\cos\frac{p_0 - e}{2}}$$

$$\sin\frac{\delta}{2} = \operatorname{tg}\frac{e}{2}\frac{\sin\left(p_0 + \frac{e}{2}\right) - \sin\frac{e}{2}}{\cos\left(p_0 + \frac{e}{2}\right) + \cos\frac{e}{2}} = \operatorname{tg}\frac{e}{2}\frac{\sin\frac{p_0}{2}\cos\frac{p_0 + e}{2}}{\cos\frac{p_0}{2}\cos\frac{p_0 + e}{2}} = \operatorname{tg}\frac{p_0}{2}\operatorname{tg}\frac{e}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{e}{2}.$$

Da aber

$$\frac{p_0 + e}{2} = \frac{p}{2},\ \frac{p_0 - e}{2} = p_0 - \frac{p}{2}$$

und

$$p_0 = 60^0,$$

so folgt

$$\left.\begin{aligned} &\Theta = \frac{1}{2}\lambda;\ \varrho = 3r\frac{\sin\frac{p}{2}}{\cos\left(60^0 - \frac{p}{2}\right)},\ k_1 = \frac{3}{4\cos\left(60^0 - \frac{p}{2}\right)^2} \\ &k_2 = \frac{3}{4\cos\frac{p}{2}\cos\left(60^0 - \frac{p}{2}\right)};\ \sin\frac{\delta}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\left(30^0 - \frac{p}{2}\right) \end{aligned}\right\}. \quad (25)$$

Für eine Cylinderprojektion setzt *Braun* voraus, dass sich das Auge so im Äquator bewegt, dass es stets in der Meridianebene des projicierten Punktes bleibt, u. zw. in der Kugeloberfläche. *Tissot*[1]) nennt diese Projektion *stereographische Cylinderprojektion.* Ihre Gleichungen sind:

$$x = r\lambda$$
$$y = r\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi.$$

24. *B*) Die Masse längs der Meridiane sollen auf der Karte gleich sein denen auf der Kugel. Dann muss $f(e) = re$ sein und die beiden Gleichungen werden

$$\left.\begin{aligned} &\Theta = m\lambda \qquad m = \sin\gamma \\ &\varrho = a + re \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Wird diese Annahme festgehalten, so hat man noch eine Wahl bezüglich m und a zu treffen, wodurch noch immer eine sehr grosse

1) l. c. p. 90.

Verschiedenheit in den Projektionsmethoden ermöglicht ist, die aber alle das Gemeinsame haben, dass die Parallelkreise durch äquidistante Kreise dargestellt werden.

Da

$$f(e) = re,$$

so wird

$$f'(e) = r,$$

folglich aus VI, VII, VII':

$$k_1 = 1,$$

was selbstverständlich ist, da in der Richtung der Meridiane wahre Längen auftreten sollen;

$$k_2 = \frac{m(a + re)}{r \cos(\beta - e)} = K$$

$$\operatorname{tg} \omega' = \frac{m(a + re)}{r \cos(\beta - e)} \operatorname{tg} \omega$$

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{m(a + re) - r \cos(\beta - e)}{m(a + re) + r \cos(\beta - e)}.$$

25. *C*) Der Kegel berührt die Kugel im mittleren Parallel; dann ist $\gamma = \beta$ demnach $m = \sin \beta$ und (Fig. 28a) $Ca = r$; also $aS = Ca \operatorname{tg} aCS = r \cot \beta$. Daher die Gleichungen für diese Projektion

$$\left.\begin{aligned} \Theta &= m\lambda \qquad m = \sin \beta \\ \varrho &= r \cot \beta + f(e) \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

a) Unter Beibehaltung dieser Annahme möge die Kegelprojektion eine perspektivische sein. Dieser Fall ist bereits in § 23 erledigt worden.

b) Die Masse längs der Meridiane sollen gleich sein jenen auf der Kugel. Dann ist nach § 24:

$$m = \sin \beta, \quad f(e) = re,$$

daher

$$\left.\begin{aligned} \Theta &= m\lambda \qquad m = \sin \beta \\ \varrho &= r \cot \beta + re \end{aligned}\right\}. \tag{27 b}$$

Ferner

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= 1, \qquad k_2 = \frac{\cos \beta + e \sin \beta}{\cos(\beta - e)} \\ \operatorname{tg} \omega' &= k_2 \operatorname{tg} \omega; \quad \sin \frac{\delta}{2} = \frac{\cos \beta + e \sin \beta - \cos(\beta - e)}{\cos \beta + e \sin \beta + \cos(\beta - e)} \end{aligned}\right\}. \tag{28}$$

Diese oft fälschlich als *einfache Bonne'sche* Projektion bezeichnete Darstellung rührt von *Ptolemäus* her und soll nach ihm *einfache Ptolemäische Kegelprojektion* benannt werden.[1]) *Ptolemäus* nahm (für

---

1) Man kann hierbei auch sehr leicht die Erdabplattung berücksichtigen. Ist A die grosse Axe, ε die Excentricität der Meridianellipse, so ist der Halbmesser des mittleren Parallels

$$MN = \frac{A \cos \beta}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \beta^2}} = MS \sin MSN = a \sin \beta,$$

die Darstellung des damals bekannten Theiles der Erde) den Parallelkreis von Rhodus als denjenigen an, in welchem die Breiten- und Längengrade im richtigen Verhältnisse stehen. Für den Halbmesser des Kartenparalleles von Rhodus (SR), dessen Breite zu 36^0 angenommen wird, nimmt *Ptolemäus* 79 Theile (1 Theil = dem Äquatorgrad). Dann werden 36 von diesen Theilen nach Süden bis A (durch welchen Punkt der Äquator geht) und 27 Theile nach Norden bis T (Parallel von Thule) aufgetragen. Der Radius des Äquators ist daher $79 + 36 = 115$ Theile, derjenige des Parallels von Thule (Island)

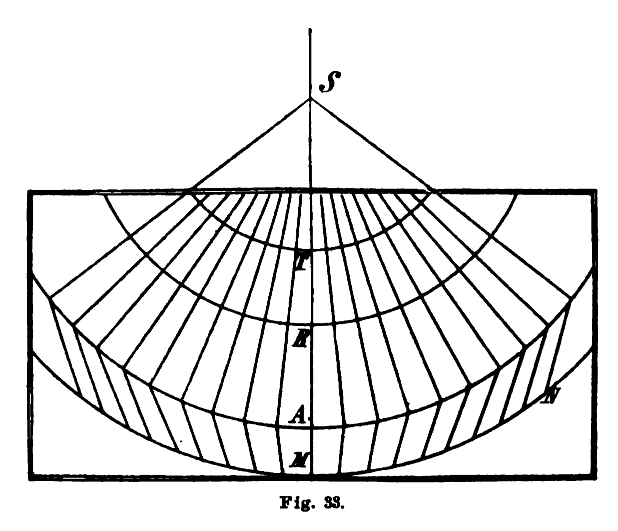


Fig. 33.

$79 - 27 = 52$ Theile. In dem Parallel von Rhodus werden 5 Längengrade gleich 4 Breitengraden gemacht, also der Längengrad gleich

also

$$\Theta = m\lambda; \qquad m = \sin\beta$$

$$a = \frac{A\cot\beta}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin\beta^2}}; \qquad \varrho = a + f(e).$$

Sollen die Masse längs der Meridiane auf der Karte gleich sein denen am Ellipsoide, so muss die aufzutragende Länge gleich dem elliptischen Meridianbogen sein. Ist e genügend klein (indem man etwa von Grad zu Grad aufträgt), so kann man die zu e gehörige Länge des Bogens Re annehmen, wenn R der Krümmungsradius der Meridianellipse in M ist, also

$$R = \frac{A(1 - \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2 \sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}},$$

folglich

$$f(e) = \frac{A(1 - \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2 \sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}\, e.$$

Fig. 34.

Die Werte von a und R können für $A = 1$ in Einheiten des Äquatorgrades aus Tafel 14 entnommen werden, und zwar a aus der mit ϱ_ω überschriebenen und R aus der mit l_φ überschriebenen Columne.

$\frac{4}{5}$ Breitengraden gemacht. Da cos 36° = 0·80902, so entspricht das Verhältniss $\frac{4}{5}$ nahe genau dem wahren; es ist ferner cot 36° = 1·37638 und für den Halbmesser 1 : arc 1° = 0·01743, demnach cot 36° = arc 1° $\times$ 78·863, daher der Halbmesser des mittleren Parallels ebenfalls sehr nahe richtig.

Ptolemäus zieht aber die Meridiane nur bis zum Äquator geradlinig, und von hier bis zum Antiparallel von Meroë wieder convergent, gerade Linien, so dass in letzterem (16° südliche Breite) die Grade des Parallels dieselbe Länge haben wie im Parallel von 16° nördliche Breite: „Licebit vero etiam nobis, lineas eas, quae pro meridianis scribendae sunt, *non uno tenore rectas perducere usque ad parallelum MYN, qui per Meroën scribitur, oppositum, sed usque ad aequinoctialem tantum*, atque ita *MYN* in segmenta diviso, quae et magnitudine et numero acceptis in Meroëtico parallelo segmentis aequalia sint, ad ipsas has incisiones ex iis quae sunt in aequinoctiali ducere interjacentes meridianorum lineas rectas, ut ex hac conversione quodammodo appareat, in altera aequinoctialis parte et ad meridiem regionem eorum deflectere." Cap. 24 seiner Geographie. (S. z. B. die Ausgabe von *Wilberg* 1838).

Diese Darstellungsweise findet sich später wieder in den sogenannten *Sternprojektionen*, deren Ursprung demgemäss auch bereits bis *Ptolemäus* zurückreicht. Von diesen soll hier nur die *Petermannsche* erwähnt werden, da diese Darstellungen wohl nur für Weltkarten, und auch hier nur beschränkte Anwendung finden dürften. Die eine Halbkugel ist in äquidistanter Polarprojektion dargestellt, wo demnach die Parallelkreise gleichweit von einander abstehen, die Meridiane gleiche Winkel mit einander bilden; die südliche Halbkugel wird in acht Dreiecke zerlegt, so dass in jedem

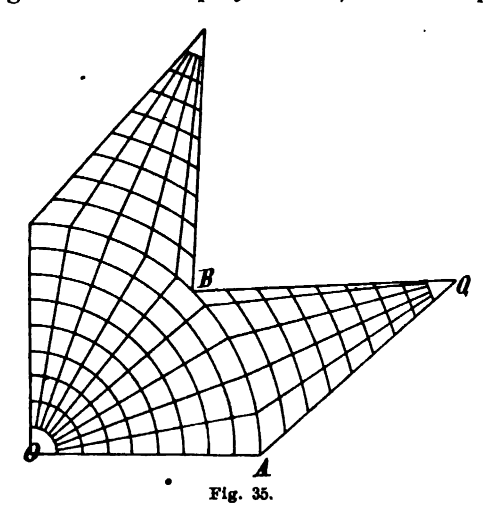


Fig. 35.

die Parallelkreise äquidistant gezogen werden können, so also, dass (Fig. 35) $OO_1 = 2\,OA$ ist. Die in ein Dreieck fallenden Meridiane werden von den Theilpunkten des Äquators zu der Spitze O_1 gezogen (s. *Petermann*'s Geographische Mittheilungen, Ergänzungsheft 16 pag. 67.) Die Vortheile derselben sind jedoch keineswegs so hoch anzuschlagen, wie dies am angeführten Orte geschieht, indem in vereinzelten Fällen, wie z. B. bei der dort erwähnten Legung eines trans-

atlantischen Cabels man schon seine Zuflucht zu einem Globus nehmen kann.

Für kleine Partien der Erdoberfläche, für welche e nur mässig ist, so dass man bei einer nach Potenzen von e fortschreitenden Entwicklung bei der zweiten Potenz abbrechen kann, hat man für die einfache *Ptolemäische* Kegelprojektion:

$$k_2 = \frac{\cos\beta + e\sin\beta}{\cos\beta\,(1 - \frac{1}{2}e^2) + e\sin\beta} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\frac{e^2\cos\beta}{\cos\beta + e\sin\beta}} = 1 + \frac{1}{2}e^2$$

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{\cos\beta + e\sin\beta - \cos\beta\,(1 - \frac{1}{2}e^2) - \sin\beta\,(e - \frac{1}{6}e^3)}{\cos\beta + e\sin\beta + \cos\beta\,(1 - \frac{1}{2}e^2) + \sin\beta\,(e - \frac{1}{6}e^3)}$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{e^2 + \frac{1}{3}e^3\operatorname{tg}\beta}{1 + e\operatorname{tg}\beta} = \frac{1}{4}\,(e^2 - \tfrac{2}{3}e^3\operatorname{tg}\beta).$$

Als Haupteigenschaften dieses Kartennetzes sind hervorzuheben: 1) dass die Masse längs der Meridiane gleich sind jenen auf der Karte; dass bei mässiger Verzerrung (Winkeländerung) noch auf ziemlicher Entfernung vom Kartenmittelpunkte, resp. vom mittleren Parallel, auch die Masse in den Parallelen nur mässig verändert werden.

Die Bestimmungen des Halbmessers des mittleren Paralleles geschieht wieder wie in Fig. 31 durch Umlegen der Ebene des ersten Meridians; bei dieser Projektion werden aber dann auf dem ersten Meridian aS und auf dem Äquator die einer Winkeldifferenz von z. B. 10^0 entsprechenden Bögen aufgetragen.[1])

Für $\beta = 0$ geht die Projektion in eine Äquatorealprojektion über; für diese ist

$$x = r\lambda$$
$$y = r\varphi,$$

wenn φ die geographische Breite des dargestellten Punktes ist.

Da für

$$f(\varphi) = \varphi; \qquad f'(\varphi) = 1,$$

so ist

$$k_1 = 1; \quad k_2 = \frac{1}{\cos\varphi}; \quad \operatorname{tg}\omega' = \operatorname{tg}\omega\sec\varphi.$$

Zeichnet man die Bilder der in gleichen Winkelabständen z. B. je 10^0 befindlichen Parallelkreise und Meridiane, so erhält man ein aus lauter Quadraten bestehendes Netz; die sogenannte *quadratische Plattkarte.* Hierzu braucht man die Werte von x und y gar nicht, indem man den Abstand zweier nächst gelegener Netzlinien ganz beliebig annehmen kann.

1) Zu bemerken ist, dass der Pol nie auf die Karte fallen darf, wenn er nicht selbst Mittelpunkt derselben ist, weil in allen anderen Fällen der Radius des Parallels von der Breite 90^0 nicht Null wird.

Für $\beta = 90^0$ entsteht eine äquidistante Polarprojektion[1]; für diese ist

$$\left.\begin{aligned} &\Theta = \lambda \\ &\varrho = r p \\ &k_1 = 1; \quad k_2 = \frac{p}{\sin p}; \quad \sin\frac{\delta}{2} = \frac{p - \sin p}{p + \sin p} \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

wo $p = 90 - \varphi$ die Poldistanz des Punktes ist. Tafel 7 giebt die Werte von k_2 und $\frac{\delta}{2}$ für Poldistanzen bis 90^0.

Nach *D'Avezac* soll diese äquidistante Polarprojektion von *Guillaume Postel* (1581) ersonnen worden sein; allein dieses Verdienst muss *Mercator* zugeschrieben werden[2], der zur Vervollständigung seiner nicht bis zum Pol reichenden Karten mit wachsenden Breiten (s. § 28) diese Polarprojektion bis zu 60^0 Poldistanz entwarf (1569).

Verlegt man den Mittelpunkt der Karte nicht in den Pol, behält aber alle hier angeführten Bedingungen bei, so werden die Bilder der auf der Kugel in gleichem Winkelabstande vom Mittelpunkte des darzustellenden Flächenteiles liegenden Punkte auf der Karte in einem Kreise liegen; die Entfernungen aller Punkte vom Kartenmittelpunkte stehen in demselben Verhältnisse wie im Original; es entsteht also eine *äquidistante zenitale Abbildung* (s. § 21). *Lambert* giebt eine solche in seinen „Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik" (III. Thl. p. 179), für den Fall, dass der Kartenmittelpunkt in den Äquator fällt. Eine Vergleichung der Tabelle 7 mit 4 zeigt, wie nahe die äquidistante Polarprojektion mit derjenigen externen Projektion zusammenfällt, für welche $\frac{a}{r}$ nahe 1·8 ist, worauf schon früher hingewiesen wurde. Die Leichtigkeit der Construktion verleiht jedoch der hier angeführten gegenüber jener den Vorzug. Übrigens entstehen centrale, stereographische und äquidistante Polarprojektionen aus der gemeinschaftlichen Formel

$$r = n a \operatorname{tg} \frac{p}{n}$$

als Spezialfälle und zwar für $n = 1$, 2 und ∞; für die ersten beiden Fälle erhellt die Richtigkeit der Behauptung sofort aus der Vergleichung der Formeln; für $n = \infty$ kann man schreiben

$$r = \left\{ \frac{\sin\frac{p}{n}}{\frac{p}{n}} \cdot \frac{p a}{\cos\frac{p}{n}} \right\}_{n=\infty} = p a.$$

c) Die Bilder der Parallelkreise entstehen als Schnitte der Ebene der Parallelkreise mit dem Kegel, woraus sich die Funktion $f(e)$ in

---

1) Sie ist durch Fig. 35 mit Hinweglassung der die zweite Halbkugel darstellenden Theile $A O_1 B$ etc. dargestellt.

2) Siehe dessen „Atlas sive Cosmographicae meditationes" 1594.

den Gleichungen (27) bestimmen lässt. In Fig. 36 ist

$$ab = mn \sec aSm = mn \sec \beta,$$

oder

$$ab = (Cm - Cn) \sec \beta = (r \sin \beta - r \sin \varphi) \sec \beta$$
$$= r \operatorname{tg} \beta - r \sin \varphi \sec \beta.$$

Da aber

$$\varrho = Sa + ab = a + ab$$

und

$$\varphi = \beta - e,$$

so ist

$$f(e) = r \operatorname{tg} \beta - r \frac{\sin(\beta - e)}{\cos \beta}.$$

Der Ausdruck für ϱ lässt sich etwas einfacher wie folgt schreiben:

$$\varrho = r \cot \beta + r \operatorname{tg} \beta - r \frac{\sin(\beta - e)}{\cos \beta} = 2r \operatorname{cosec} 2\beta - r \frac{\sin(\beta - e)}{\cos \beta}.$$

Die Gleichungen dieser Projektion sind daher

$$\left.\begin{aligned} \Theta &= m\lambda; \quad m = \sin \beta \\ \varrho &= 2r \operatorname{cosec} 2\beta - r \frac{\sin(\beta - e)}{\cos \beta} \end{aligned}\right\} (30)$$

Es ist

$$f'(e) = r \frac{\cos(\beta - e)}{\cos \beta},$$

und damit

$$k_1 = \frac{\cos(\beta - e)}{\cos \beta}$$

$$k_2 = \sin \beta \frac{2 \operatorname{cosec} 2\beta - \frac{\sin(\beta - e)}{\cos \beta}}{\cos(\beta - e)}$$

$$= \frac{1 - \sin \beta \sin(\beta - e)}{\cos \beta \cos(\beta - e)}$$

$$K = \frac{1 - \sin \beta \sin(\beta - e)}{\cos \beta^2}$$

$$\operatorname{tg} \omega' = \frac{1 - \sin \beta \sin(\beta - e)}{\cos(\beta - e)^2} \operatorname{tg} \omega$$

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{\sin(\beta - e) - \sin \beta}{1 - \sin \beta \sin(\beta - e) + \cos(\beta - e)^2} \sin(\beta - e).$$

Fig. 36.

Der Vorgang beim Zeichnen des Kartennetzes ergiebt sich unmittelbar aus der Figur. Ist a der Kartenmittelpunkt, ay der erste Meridian, und legt man diesen um, so wird der Kugelmittelpunkt nach C kommen, und macht man $\sphericalangle aCS = 90 - \beta$, so erhält man in S den Mittelpunkt der Parallelkreise der Karte. Die von den Theilungspunkten A, B, ... des Kreisumfanges (welche den einzelnen zu zeichnenden Parallelkreisen entsprechen) auf SC gefällten Perpendikel Am, Bn, ... bestimmen auf Sa die auf dieser Geraden liegenden

Theilpunkte $a, b, \ldots$ der Parallelen, und die mit Sa, Sb als Halbmesser gezeichneten Kreise sind die Parallelkreise der Karte. Um die Meridiane zu ziehen, wird man wieder auf den mittlern Parallel ax den mit $a = r \cot\beta$ multiplicierten Wert von z. B. $10^0 \sin\beta$, der aus Tafel 6a entnommen wird, wiederholt auftragen und die Theilpunkte mit S verbinden.

Für kleine Werte von e hat man

$$k_1 = \frac{\cos\beta\,(1 - \frac{1}{2}e^2) + e\sin\beta}{\cos\beta} = 1 + e\operatorname{tg}\beta - \tfrac{1}{2}e^2$$

$$k_2 = \frac{1 - \sin\beta^2\,(1 - \frac{1}{2}e^2) + e\sin\beta\cos\beta}{\cos\beta^2\,(1 - \frac{1}{2}e^2) + e\sin\beta\cos\beta} = \frac{\cos\beta^2 + e\sin\beta\cos\beta + \frac{1}{2}e^2\sin\beta^2}{\cos\beta^2 + e\sin\beta\cos\beta - \frac{1}{2}e^2\cos\beta^2}$$

$$= \left(1 + \frac{\frac{1}{2}e^2\sin\beta^2}{\cos\beta^2 + e\sin\beta\cos\beta}\right)\left(1 - \frac{\frac{1}{2}e^2\cos\beta^2}{\cos\beta^2 + e\sin\beta\cos\beta}\right)^{-1},$$

also

$$k_2 = 1 + \tfrac{1}{2}e^2; \qquad K = 1 + e\operatorname{tg}\beta$$

$$\sin\frac{\delta}{2} = -e\operatorname{tg}\beta + e^2\sec\beta^2.$$

Man erkennt aus diesen Ausdrücken, dass die Vergrösserung und Verzerrung von der ersten Potenz von e abhängt, und daher schon für mässige Werte von e beträchtlich wird, diese Projektionsart bietet auch sonst keine wesentlichen Vortheile. Nur für $\beta = 0$ wird hieraus

$$k_1 = 1 - \tfrac{1}{2}e^2$$

$$k_2 = 1 + \tfrac{1}{2}e^2, \quad K = 1; \quad \sin\frac{\delta}{2} = e^2,$$

wo also, wie man hieraus sieht, die Flächenvergrösserung gleich 1 wird. Dass diese Beziehung jedoch allgemein (nicht nur bis auf die zweite Potenz von e) gilt, folgt aus den Gleichungen für die Cylinderprojektionen. Berührt der Cylinder die Kugel im Äquator, und entstehen die Parallelkreise der Karte als Schnitte der Parallelen der Kugel mit dem Cylinder, so ist ihre Entfernung y vom Äquator gleich dem Abstande der Ebenen der Parallelen vom Äquator, also $r\sin\varphi$; es gelten daher die Gleichungen

$$x = r\lambda$$

$$y = r\sin\varphi,$$

also

$$f(\varphi) = \sin\varphi; \quad f'(\varphi) = \cos\varphi$$

$$k_1 = \cos\varphi$$

$$k_2 = \frac{1}{\cos\varphi},$$

also stets

$$K = 1;$$

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{\sin\varphi^2}{1 + \cos\varphi^2}.$$

Die Construktion dieses Kartennetzes ist sehr einfach; die Parallelkreise werden erhalten, indem man durch die Theilpunkte a, b eines

Kreises vom Halbmesser r gerade Linien parallel zum Äquator zieht. Um die Meridiane zu erhalten, hat man sich den Äquatorumfang aufzutragen, und diesen dann in die entsprechende Anzahl gleicher Theile zu teilen, oder direkt die einem Intervalle entsprechende Bogenlänge mehrmals abzutragen, wozu man sich der Tafel der Bögen (Tafel 8) bedienen kann. Fig. 37 stellt dieses Kartennetz dar.

Es ist zu bemerken, dass hier $K = 1$ für alle Punkte des Bildes. Es haben in Folge dessen irgendwelche Flächentheile des Bildes dasselbe Verhältnis wie die entsprechenden Flächentheile der Kugel. Diese Abbildung gehört also zu den *äquivalenten Projektionen* (s. § 33);

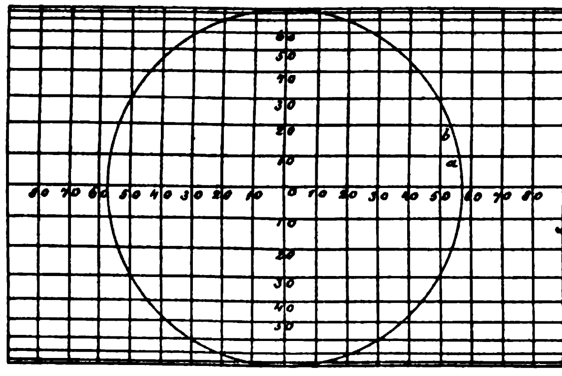


Fig. 37.

sie rührt von *J. H. Lambert* her (s. dessen Beiträge III, pg. 181), wurde aber neuerdings von *Piazzi Smith* wieder als neu in Vorschlag gebracht. *Germain* nennt sie *gerade isocylindrische Projektion von Lambert.* [1])

26. *D*) Die Karte soll zwei Parallelkreise mit der Kugel gemein haben. Legt man den Kegel so, dass er die Kugel in den beiden gewählten Parallelkreisen schneidet, so ist man in der Wahl der Funktion $f(e)$ nicht mehr frei, sondern stets an die Bedingung gebunden, dass der Bogen der Karte zwischen den beiden Parallelkreisen gleich ist der Sehne, die zwischen zwei im selben Meridian gelegenen Punkten der beiden Parallelkreise auf der Kugel enthalten ist. Im übrigen ist das Gesetz allerdings noch willkürlich, daher mannigfaltig. Diese Bedingung ist z. B. erfüllt, wenn die Punkte der Kugel perspektivisch von einem beliebigen Punkte, der auch im Unendlichen liegen kann, auf den Kegel projiciert werden. Wird aber z. B. die Bedingung gestellt, dass die Bögen auf den Meridianen der Kugel gleich sein sollen denjenigen auf der Karte, so ist es selbstverständlich nicht mehr möglich, dass der Kegel mit der Kugel

1) s. *Germain*, traité des projections des cartes géographiques, pag. 85.

die beiden Parallelkreise wirklich gemeinschaftlich habe, d. h. dass er dieselbe in diesen beiden Kreisen schneide, da die Sehne notwendig kürzer sein muss als der Bogen, und die Erzeugende des Kegelmantels zwischen den beiden Parallelkreisen Sehne der Kugel ist. Die oben ausgesprochene Bedingung ist dann so umzuändern, dass die Masse längs zweier Parallelkreise auf der Karte gleich seien denjenigen auf den entsprechenden beiden Parallelen der Kugel.[1]) Doch findet man mitunter die obige Ausdrucksweise auch für diesen Fall, welche aber dann nur als eine façon de parler aufzufassen ist.

Sei nun die geographische Breite des Kartenmittelpunktes β, die geographischen Breiten der beiden Parallelkreise, längs denen die Masse auf der Karte gleich sein sollen denjenigen auf der Kugel: $\beta - \varepsilon$ und $\beta + \varepsilon$; die zu der Längendifferenz λ gehörigen Bögen derselben sind auf der Kugel $r \cos(\beta - \varepsilon)\lambda$ und $r \cos(\beta + \varepsilon)\lambda$.

Die zugehörigen Halbmesser auf der Karte sind

$$\varphi_1 = a + f(\varepsilon) \quad \text{und} \quad \varrho_2 = a - f(\varepsilon)$$

und der Winkel zwischen den zugehörigen Meridianen $m\lambda$, demnach die zugehörigen Bogenlängen:

$$[a + f(\varepsilon)]\, m\lambda \quad \text{und} \quad [a - f(\varepsilon)]\, m\lambda.$$

Die oben ausgesprochene Bedingung giebt die Gleichungen:

$$[a + f(\varepsilon)]\, m\lambda = r \cos(\beta - \varepsilon)\lambda$$
$$[a - f(\varepsilon)]\, m\lambda = r \cos(\beta + \varepsilon)\lambda,$$

oder

$$[a + f(\varepsilon)]\, m = r \cos\beta \cos\varepsilon + r \sin\beta \sin\varepsilon$$
$$[a - f(\varepsilon)]\, m = r \cos\beta \cos\varepsilon - r \sin\beta \sin\varepsilon.$$

Durch Addition und Subtraktion dieser beiden Gleichungen folgt:

$$\left.\begin{aligned} am &= r \cos\beta \cos\varepsilon \\ f(\varepsilon)m &= r \sin\beta \sin\varepsilon \end{aligned}\right\} \qquad \text{(m)}$$

und durch Division der letzten beiden

$$a = \cot\beta \cot\varepsilon f(\varepsilon),$$

während die zweite der beiden Gleichungen (m)

$$m = r \sin\beta \frac{\sin\varepsilon}{f(\varepsilon)}$$

liefert. Die Gleichungen dieser Projektion werden demnach

$$\left.\begin{aligned} \Theta = m\lambda; \quad m &= r \sin\beta \frac{\sin\varepsilon}{f(\varepsilon)} \\ \varrho = \cot\beta \frac{f(\varepsilon)}{\operatorname{tg}\varepsilon} &+ f(e) \end{aligned}\right\}. \qquad (31)$$

a) Die Projektion sei eine perspektivische, dann kann man, wie schon § 23 erwähnt ist, den Kugelhalbmesser so weit zusammenziehen,

1) Eigentlich dasselbe Verhältnis zu den Meridiangraden haben, wie auf der Kugel.

dass der Kegel die Kugel nicht in zwei Parallelen schneidet, sondern im mittlern Parallel berührt.

b) Die Masse längs der Meridiane sind auf der Kugel und in der Karte gleich. Dann ist

$$f(e) = re; \quad f'(e) = r$$
$$f(\varepsilon) = r\varepsilon,$$

folglich die Gleichungen der Projektion

$$\left.\begin{aligned} \Theta &= m\lambda; \quad m = \sin\beta \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} \\ \varrho &= r \cot\beta \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg}\varepsilon} + re \end{aligned}\right\} . \qquad (31\,b)$$

Dieses ist die fälschlich nach *De l'Isle* genannte Projektion, welcher Gelehrte dieselbe für die Darstellung der 1745 publicierten grossen Karte von Russland verwendete. Doch ist dieselbe zuerst von *Mercator* gewählt worden und sie soll demnach auch die *Mercator*'sche Kegelprojektion genannt werden. In seinem grossen „Atlas sive cosmographicae meditationes de fabrica mundi et fabricati figura", welcher 1594 in Duisburg erschien, sind hauptsächlich zwei Projektionen[1]) verwendet, und zwar erstens Karten mit wachsenden Breiten (s. § 28) und zweitens die hier eben beschriebene; für Europa spricht *Mercator* das Princip in den Worten aus: „Medius meridianus 50. reliqui ad hunc inclinantur pro ratione 60. et 40. parallelorum". Für die Karte von Europa wählt also Mercator als Parallelkreise, in denen die wahren Masse stattfinden, oder richtiger ausgedrückt, in denen das Verhältnis zwischen Längengrad und Breitengrad das richtige ist (gleich dem auf der Kugel) die Parallelkreise von 40° und 60° geographischer Breite. Zwischen diesen beiden werden die Längengrade kleiner als sie es im Verhältnis zu den Breitengraden sein sollten, über die Grenze hinaus grösser.

Im Jahre 1735 hat von derselben Projektion *D'Anville* Gebrauch gemacht für seine grosse Karte von China[2]); die Parallelkreise, in denen Breiten- und Längengrade im richtigen Verhältnis stehen, haben die geographischen Breiten + 20° und + 50°. *Jos. Niclas de l'Isle* verwendete diese nach ihm benannte Projektion, wie schon oben erwähnt, bei der 1745 publicierten grossen Karte von Russland, die sich zwischen 40° und 70° nördlicher Breite erstreckt, wobei in den

1) Ausserdem findet sich eine Weltkarte und die Karte von Amerika (in selbstverständlich sehr abenteuerlicher Form) in stereographischer Äquatorealprojektion, eine Karte der Polargegenden in äquidistanter Polarprojektion und ferner eine Karte von Asien und eine von Africa in der zweihundert Jahre später in ausgedehnter Verwendung gekommenen fälschlich als *Bonne*'sche Projektion bezeichneten Darstellung (s. § 41).

2) Carte la plus général et qui comprend la Chine, la Tartarie Chinoise et le Tibet par M. *d'Anville*. La Haye 1735.

Parallelkreisen von $47\frac{1}{2}^0$ und $62\frac{1}{2}^0$ Breite die wahren Verhältnisse zwischen Graden des Parallels und des Meridians erscheinen. In derselben Projektion ist auch sein 1754 erschienener „Atlas geographicus omnes orbis terrarum regiones in 41 tabulas exhibens. Berolini 1754" gezeichnet.

Für die Zeichnung des Netzes kann man sich der Tafel 9 bedienen, welche die Werte von $\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}$ und $\frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \varepsilon}$ von Grad zu Grad zwischen den Grenzen 0^0 und 20^0 giebt. Für $\varepsilon = 0$, wird $\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} = 1$, $\frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \varepsilon} = 1$ und die Gleichungen gehen in jene für die einfache *Ptolemäische* Kegelprojektion über, wie es auch sein muss, da für $\varepsilon = 0$ die beiden Parallelkreise, welche Kegel und Kugel gemeinschaftlich haben, zusammenfallen, also der Kegel die Kugel berührt.

Für die Vergrösserungen hat man:

$$k_1 = 1$$

$$k_2 = \sin \beta \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \frac{\cot \beta \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \varepsilon} + e}{\cos (\beta - e)} = \frac{\cos \beta \cos \varepsilon + e \sin \beta \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}}{(\cos \beta - e)}$$

$$= \frac{\cos \beta \cos \varepsilon + \sin \beta \sin \varepsilon - \left(1 - \frac{e}{\varepsilon}\right) \sin \beta \sin \varepsilon}{\cos (\beta - e)}$$

$$= \frac{\cos (\beta - \varepsilon)}{\cos (\beta - e)} - \left(1 - \frac{e}{\varepsilon}\right) \frac{\sin \beta \sin \varepsilon}{\cos (\beta - e)},$$

oder wenn man nach Potenzen von e und ε entwickelt, und bei der zweiten abbricht:

$$k_2 = \frac{\cos \beta (1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2) + e \sin \beta}{\cos \beta (1 - \frac{1}{2} e^2) + e \sin \beta} = 1 + \tfrac{1}{2} (e^2 - \varepsilon^2)$$

und mit derselben Annäherung

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2} (e^2 - \varepsilon^2)$$

Vergleicht man die hier gewonnenen Resultate mit denjenigen für die einfache *Ptolemäische* Kegelprojektion, so findet man, dass die möglichste Gleichförmigkeit in der Vergrösserung und die möglichst geringe Verzerrung hier noch mehr erreicht ist, wie bei jener. Obzwar hier nebst Vergrösserungen (für $e > \varepsilon$) auch Verkürzungen (für $\varepsilon > e$) vorkommen, so wird doch die grösste Abweichung des Verhältnisses zwischen Längen- und Breitengraden vom wahren nicht so stark werden wie bei der einfachen *Ptolemäischen* Kegelprojektion. Ist die Ausdehnung der Karte in Breite $2e$, und wählt man ε so, dass die Karte durch die beiden Parallelkreise, auf welchen die Masse auf der Kugel und in der Karte gleich sind, in drei gleiche Theile getheilt wird, so wird $\varepsilon = \frac{1}{3} e$, also der Maximalwert der Vergrösserung am Rande der Karte gleich $1 + \frac{4}{9} e^2$.

Um eine Karte nach dieser Projektion zu zeichnen, wird man auf den durch den Kartenmittelpunkt gehenden Meridian (welcher natürlich geradlinig ist) den Wert von $\cot \beta \cdot \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \varepsilon}$ auftragen; wählt

man den Äquatorgrad als Einheit, so wird man den Betrag $\frac{\cot\beta}{\text{arc }1^0}\cdot\frac{\varepsilon}{\operatorname{tg}\varepsilon}$ zu nehmen haben. Den ersten Faktor $\frac{\cot\beta}{\text{arc }1^0}$ kann man aus Tafel 13 (Argument $\beta=\varphi$) in der Columne ϱ entlehnen; multipliciert man den hieraus erhaltenen Wert mit dem in Tafel 9 gefundenen Werte von $\frac{\varepsilon}{\operatorname{tg}\varepsilon}$, so erhält man den Abstand der Kegelspitze (Mittelpunkt der Kartenparallelen) vom Kartenmittelpunkte. Sei z. B. die geographische Breite des Kartenmittelpunktes $\beta=40^0$, und soll 2ε (die Breitendifferenz der beiden Parallelkreise, in denen die Verhältnisse der Längen und Breitengrade die richtigen sind) gleich 10^0 sein, so wird aus Tafel 13 (für $\beta=40^0$) $\varrho=68\,282$ und aus Tafel 9 für $\varepsilon=5^0:\frac{\varepsilon}{\operatorname{tg}\varepsilon}=0{\cdot}99746$, daher $\cot\beta\,\frac{\varepsilon}{\operatorname{tg}\varepsilon}=68{\cdot}11$. Trägt man diesen Wert vom Kartenmittelpunkte aus auf dem mittleren Meridian nach aufwärts auf, so ergiebt sich der Mittelpunkt S der Parallelkreise der Karte. Ferner trägt man vom Kartenmittelpunkte auf dem Mittelmeridian nach beiden Seiten wiederholt die Einheit auf (1^0 des Meridians wurde ja als Einheit gewählt) oder die Länge $=10$, wenn die Parallelkreise von 10 zu 10 Graden gezogen werden sollen, so sind die durch die Theilpunkte gezogenen Kreise, deren Mittelpunkt S ist, die Parallelkreise der Karte. Um die Meridiane zu ziehen, wird man etwa für die Längendifferenz $\lambda=10^0$ den Wert $m\lambda=10^0\sin\beta\,\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}$ bestimmen; der erste Faktor $10^0\sin\beta$ findet sich aus Tafel 6 für das gewählte Beispiel gleich $0{\cdot}11219$; der zweite Faktor $\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}$ aus Tafel 9 zu $0{\cdot}99873$, daher $10^0\sin\beta\,.\,\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}=0{\cdot}11205$, also für den Halbmesser $68{\cdot}11$ die Bogenlänge gleich $7{\cdot}63$ Theile, welche man auf dem mittleren Parallel wiederholt aufträgt. Verbindet man die erhaltenen Punkte mit S, so erhält man die Kartenmeridiane von 10^0 zu 10^0; sollen auch die Zwischenmeridiane (etwa von Grad zu Grad) gezogen werden, so wird man die abgetragene Bogenlänge (hier $7{\cdot}63$) in die entsprechende Anzahl Theile zu theilen haben, und die Theilpunkte mit S verbinden.

Man könnte nun fragen, wie man ε wählen soll, damit die Vergrösserung der Karte am Rande übereinstimmen soll, mit der Verkleinerung in der Mitte der Karte; diese Frage stellte sich *Euler*[1]). Eine genäherte Lösung erhält man sehr leicht aus den obigen Näherungsformeln. Am Rande der Karte, für $e=e_1$ ist nämlich die Vergrösserung $1+\frac{1}{2}(e_1^2-\varepsilon^2)$; in der Mitte für $e=0$ wird die Verkleinerung $1-\frac{1}{2}\varepsilon^2$. Das Bild eines Elementes $d\omega$ der Kugelfläche

1) In seiner Abhandlung: „De Projectione geographica de Lisliana in mappa generali imperii Russici usitata" in den Actis Academiae scientiarum Petropolitanae 1777. I. Thl. p. 143 ff.

hat daher auf der Karte an den beiden Stellen den Flächeninhalt

$$d\omega + d\omega \,.\, \tfrac{1}{2}(e_1^2 - \varepsilon^2)$$

und

$$d\omega - d\omega \,.\, \tfrac{1}{2}\varepsilon^2.$$

Soll die Vergrösserung $\frac{1}{2}d\omega(e_1^2 - \varepsilon^2)$ im ersten Falle gleich sein der Verkleinerung $\frac{1}{2}d\omega\varepsilon^2$ im zweiten Falle, so muss

$$\tfrac{1}{2}(e_1^2 - \varepsilon^2) = \tfrac{1}{2}\varepsilon^2$$

sein, woraus folgt

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,.\,e_1 = 0{\cdot}707107\,e_1$$

und die thatsächliche Deformation (Vergrösserung am Rande und Verkürzung in der Mitte) wird gleich $\frac{1}{4}e_1^2$.

Für $e_1 = 5^0$ (einer Gesammtausdehnung der Karte von 10^0 entsprechend), wird $\frac{1}{4}e_1^2 = 0{\cdot}0019038$, demnach die Vergrösserung in der Richtung der Parallelen am Rande der Karte 1·0019, in der Mitte 0·9981.

Für $e_1 = 15^0$ (einer Gesammtausdehnung der Karte von 30^0 entsprechend) werden diese Zahlen 1·0171, 0·9829, also die Deformation trotz der beträchtlichen Ausdehnung der Karte noch immer so klein, dass die Darstellung als eine befriedigende angesehen werden kann.

Euler löst die Aufgabe in der Weise, dass auf den beiden äussersten Parallelen der Karte die Vergrösserungen unter einander gleich, und gleich der Maximalverkürzung auf der Karte sein sollen. Die Länge des Parallelbogens ist allgemein auf der Kugel $r\cos(\beta - e)\,.\,\lambda$; auf dem Kegel $(a + re)\,m\lambda$; die Differenz ist daher für den südlichsten Parallel der Karte

$$(a + re_1)\,m\lambda - r\cos(\beta - e_1)\,\lambda$$

und für den äussersten Parallel, der nördlich vom Kartenmittelpunkte liegt:

$$(a - re_2)\,m\lambda - r\cos(\beta + e_2)\,\lambda.$$

Die Gleichheit dieser beiden Ausdrücke führt auf die Gleichung

$$(a + re_1)\,m - r\cos(\beta - e_1) = (a - re_2)\,m - r\cos(\beta + e_2), \quad \text{(n)}$$

woraus folgt:

$$m = \frac{\cos(\beta - e_1) - \cos(\beta + e_2)}{e_1 + e_2}.$$

Nun ist $\beta - e_1 = \varphi_1$ die Breite des südlichsten Paralleles $\beta + e_2 = \varphi_2$ diejenige des äussersten nördlich gelegenen, und $e_1 + e_2 = \psi$ [1]) der zwischenliegende Bogen, daher wird

$$m = \frac{\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2}{\psi}.$$

Man braucht daher zur Bestimmung von m die Lage derjenigen Parallelkreise, für welche die Masse auf der Kugel und dem Kegel dieselben sein sollen, gar nicht zu kennen. Für einen Punkt zwischen diesen beiden Parallelen wird die Verkürzung

$$V = r\cos(\beta - e)\,\lambda - (a + re)\,m\lambda.$$

Dieselbe wird ein Maximum, wenn

$$\frac{dV}{de} = 0.$$

1) Im Bogenmass für den Halbmesser 1 ausgedrückt.

Es ist aber

$$\frac{dV}{de} = [r \sin(\beta - e) - mr]\,\lambda$$

und dieses wird Null, wenn

$$\sin(\beta - e_0) = m$$

und der zugehörige Wert der Vergrösserung ist

$$F = [r\cos(\beta - e_0) - (a + re_0)\sin(\beta - e_0)]\,\lambda,$$

wobei e_0 bestimmt ist durch die Gleichung

$$\sin(\beta - e_0) = \frac{\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2}{\psi}.$$

Wir wollen nun $e_0 = 0$ wählen, d. h. der Mittelpunkt der Karte, dessen Breite β ist, soll so gewählt werden, dass für ihn die Verkürzung ein Maximum wird. Er wird dann nicht gerade Mitte der Karte, sondern als Mittel- oder Hauptpunkt in der bereits früher erwähnten Bedeutung zu bezeichnen sein. Seine Lage ist bestimmt durch

$$\sin\beta = \frac{\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2}{\psi}, \qquad (\alpha)$$

wenn φ_1, φ_2 die geographischen Breiten der äussersten Parallelen und ψ die im Bogenmass für den Halbmesser 1 ausgedrückte Breitendifferenz desselben ist. Der Wert der Maximalverkürzung ist

$$(r\cos\beta - a\sin\beta)\,\lambda$$

und aus der Bedingung, dass dieser Wert gleich sei der Verlängerung am Rande der Karte, folgt:

$$(r\cos\beta - a\sin\beta) = (a + re_1)\sin\beta - r\cos(\beta - e_1)$$

und da $\beta - e_1 = \varphi_1$ ist:

$$\frac{r(\cos\beta + \cos\varphi_1)}{\sin\beta} = 2a + re_1$$

$$a = \frac{r}{2}\left[\frac{\cos\beta + \cos\varphi_1}{\sin\beta} - e_1\right] = \frac{r}{2}\left[\frac{\cos\beta + \cos\varphi_2}{\sin\beta} + e_2\right] \qquad (\beta)$$

welche Werte wegen (n) übereinstimmen müssen.

Für $\varphi_1 = 40^0$, $\varphi_2 = 70^0$ wird $\log m = \log\sin\beta = 9{\cdot}90839$, demnach $\beta = 54^0 4' 40''$ also nahe der Mitte der Karte entsprechend. Es wird dann $m = 0{\cdot}80982$

$$e_1 = 14^0\ 4'40'' = 0{\cdot}24570$$

$$e_2 = 15^0 55' 20'' = 0{\cdot}27790,$$

folglich der Halbmesser des Punktes für die Breite β nach obigen Formeln:

$$a = 0{\cdot}71232\,r,$$

der Halbmessser des nördlichsten Parallels

$$\varrho_1 = a - re_1 = 0{\cdot}46662\,r$$

derjenige des südlichsten

$$\varrho_2 = a + re_2 = 0{\cdot}99022\,r,$$

wobei die Länge eines Grades des Meridians $0{\cdot}01745\,r$ ist. Nimmt man diese Länge als Einheit, so wird

$$a = 40{\cdot}8206$$

$$\varrho_1 = 26{\cdot}7428; \quad \varrho_2 = 56{\cdot}7428.$$

Hiernach lässt sich die Karte sehr leicht construieren. Ist die Breite der äussersten zur Darstellung gelangenden Parallelen $\varphi_1 \varphi_2$ gegeben, so berechnet man nach (α) die Breite β des mittleren Parallels, nach (β) dessen Halbmesser, den man vom Kartenmittelpunkte auf den ersten Meridian aufträgt, und erhält so den Mittelpunkt sämmtlicher Parallelkreise. Die Formel $\Theta = \lambda \sin \beta$, giebt den Winkel an der Kegelspitze für den Meridian einer beliebigen Längendifferenz, wobei man sich der Tafel 6 (für $\lambda = 10^0$) bedient. Die übrigen Meridiane erhält man durch entsprechende Eintheilung oder Übertragung. Trägt man am ersten Meridian nach beiden Seiten, die zu den Winkelabständen der Parallelkreise gehörigen Bögen auf, so erhält man die im ersten Meridian gelegenen Punkte der Parallelkreise, durch welche man aus dem gemeinsamen Mittelpunkte Kreise beschreibt.[1])

Setzt man in der *Mercator*'schen Kegelprojektion $\beta = 0$, so geht der Kegel in einen Cylinder über, der mit der Kugel die beiden Parallelkreise, von der Breite $\pm \varepsilon$ gemein hat. Es ist $m = 0$, $\varrho = \infty$; dann wird aber

$$x = r \cos \varepsilon \,.\, \lambda$$
$$y = r \varphi,$$

weil die Masse auf der Karte längs der X-axe gleich sind den Massen auf der Kugel längs des Parallelkreises von der Breite ε. Es verhält sich demnach die Länge eines Längengrades zu derjenigen eines Breitengrades wie $\cos \varepsilon : 1$, welches Verhältnis für die Breite ε das richtige ist. Zeichnet man Meridian und Parallelkreise in gleichen Winkelabständen, so entsteht ein Netz von rechteckigen Maschen, deren Länge (Richtung der y) sich zur Breite (Richtung der x) verhält, wie $1 : \cos \varepsilon$. Diese sogenannte *rechteckige Plattkarte* hat *Bourgignon d'Anville* zur Construktion seiner Karte von Guinea (im Jahre 1776) verwendet, indem er dabei die Karte natürlich nicht zwischen den Breiten $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ erstreckte, sondern nur jenen Theil, der in der Nähe des Parallels der Breite ε liegt, zeichnete.

Quadratische und rechteckige Plattkarten sind übrigens so naturgemässe Darstellungen, dass es wol nicht nur *einen* einzigen Erfinder derselben giebt[2]). Handelte es sich darum, ein nicht willkürliches son-

---

1) Die Breiten der Parallelkreise, in denen die Masse auf der Kugel und dem Kegel gleich sind, folgen aus der Gleichung

$$\varrho \,.\, m\lambda = r \cos \varphi \,.\, \lambda$$

also:

$$\left\{\frac{r}{2}\left(\frac{\cos\beta + \cos\varphi_1}{\sin\beta} - e_1\right) \pm re\right\} m = r\cos(\beta \mp e)$$

oder

$$\frac{\cos\beta + \cos\varphi_1}{\sin\beta} - e_1 \pm 2e = 2\,\frac{\cos(\beta \mp e)}{m} \quad \text{wo } m = \frac{\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2}{\psi}$$

sowol für die oberen als auch für die unteren Zeichen.

2) Nach *d'Avezac* rührt die quadratische Plattkarte von *Eratosthenes* her

dern, wenn auch nur auf Schätzung beruhendes Bild eines Theiles der Erdoberfläche zu geben, so war es am natürlichsten sich ein Netz von Meridianen und Parallelkreisen ohne Rücksicht auf Krümmung derselben, derart herzustellen, dass sich die Netzlinien wie in der Natur rechtwinklig durchschneiden. Je nachdem man dabei auf die verschiedene Länge der Grade der Meridiane und Parallelen keine Rücksicht nimmt, oder dieselbe berücksichtigt, entsteht die quadratische oder rechteckige Plattkarte.

Anmerkung. Obzwar sowol die perspektivischen als auch die Kegelprojektionen bereits in ihren Principien von *Cl. Ptolemäus* angegeben waren, bediente man sich im Mittelalter vor der Zeit des Wiedererwachens griechischer Kunst und Wissenschaft anfänglich nur sogenannter *Compasskarten.* Diese wurden für die Zwecke der Seefahrer angelegt, waren ohne Gradnetz entworfen, und enthielten an dessen Stelle ein Netz von Windrosen, woher auch ihr Name rührt. Das älteste uns erhaltene Kartenwerk des Mittelalters soll dasjenige des *Petrus Vessconti* aus Genua sein.[1]) Das in der k. k. Hofbibliothek in Wien enthaltene Exemplar (Cod. membr. 594) enthält nur solche Compasskarten; ebenso das aus dem Jahre 1480 stammende Kartenwerk des *Graciosus Benincasa* aus Ancona (Exemplar der k. k. Hofbibliothek Cod. membr. 355). Hingegen ist die Kartensammlung des *Battista Agnese* aus Genua, die aus dem Jahre 1548 stammen soll (sowol der von *Wieser* beschriebene Portulan des Infanten und nachmaligen Königs Philipp II. von Spanien, als auch das in der Hofbibliothek in Wien befindliche Exemplar: Cod. membr. 623, lassen sowol bezüglich des Autors als der Entstehungszeit nur Schlüsse zu; in dem letztern ist die sich hierauf beziehende handschriftliche Bemerkung weggekratzt), durchaus nicht, wie *Wieser* meint, „projektionslos", sondern auf ein, allerdings nicht eingezeichnetes quadratisches Maschennetz zu beziehen, d. h. sämmtliche Karten sind quadratische Plattkarten. Verzeichnet sind allerdings[2]) nur die Compassstriche, allein auf dem geradlinigen Meridiane des Kartenmittelpunktes und der darauf senkrecht stehenden, den Parallel desselben darstellenden Geraden, sind in gleichen Entfernungen die Längen- und Breitengrade aufgetragen und beschrieben. Karte 3[2]) (der grosse Ocean) enthält z. B. von den Netzlinien den Meridian des Kartenmittelpunktes, den durch letzteren gehenden Äquator, und die beiden Wendekreise. Nur Karte 6 und 7[2]) enthalten auch diese Eintheilung nicht.[3]) Dies bemerkt auch *D'Avezac* (l. c. p. 298): „Projetée à échelle constante sur un système de roses symétriquement réparties, ces cartes appartiennent virtuellement à la famille primitive des cartes plates et il fallut une bien grande ignorance ou un parti pris d'adulation bien éhonté, pour faire honneur au prince Henri de Portugal au XV. siècle de l'invention de cette projection, la plus ancienne et la plus vulgaire de toute." (S. hierzu das § 14 gesagte.) Als eine Modification der damals gebrauchten rechteckigen Plattkarten hat man die *trapezförmigen* Plattkarten anzusehen, welche aus dem Bestreben hervorgegangen zu sein scheinen, das Verhältnis der Längengrade zu den Breitengraden mehr der Wahrheit anzupassen, indem man das Abnehmen der Grade

---

1) S. z. B. *Wieser*, Sitzungsberichte der philolog. Klasse der Wiener Acad. der Wissenschaften, Bd. 82. Doch ist daselbst (pag. 550) seine Entstehungszeit durch einen Druckfehler auf 1518 statt 1318 angegeben.

2) Auf dem Exemplar der Wiener Hofbibliothek.

3) Für die Darstellung der Weltkarten s. § 35.

der Parallelkreise durch die Kartenform (Fig. 38) darzustellen suchte. Nur der Meridian $a\,b$ des Kartenmittelpunktes steht auf den Parallelen der Karte senkrecht; die Grade der Parallelkreise werden gegen die Pole zu kleiner, so aber, dass die Meridiane geradlinig bleiben; die Netzfiguren sind also sämmtlich Trapeze. In dem griechischen Manuskripte 1401 der Pariser Bibliothek aus dem 14. Jahrhundert sind die Karten meist von dieser Form.[1])

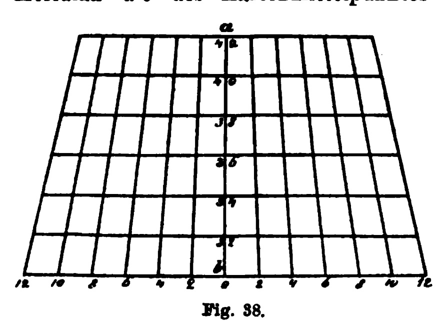


Fig. 38.

M. L. Donny schlug 1849 vor[1]), die Karte so zu zeichnen, dass ein von zwei Parallelkreisen und zwei Meridianen begrenztes Kugelstück durch ein Trapez dargestellt werde, für welches die Verhältnisse der Seiten gleich seien denjenigen der auf dem dargestellten grössten Kreise der Kugel[2]).

27. *E*) Wir hatten in § 22 für das Vergrösserungsverhältnis bei Kegelprojektionen gefunden

$$k_1 = \frac{f'(e)}{r}$$

$$k_2 = m\,\frac{a + f(e)}{r \cos(\beta - e)}$$

$$k^2 = k_1^2 \cos \omega^2 + k_2^2 \sin \omega^2$$

$$\operatorname{tg} \omega' = \frac{k_2}{k_1} \operatorname{tg} \omega$$

Man könnte nun auch hier jene Projektion suchen, bei welcher das Vergrösserungsverhältnis unabhängig von der Richtung wird, und jene, bei welcher eine Veränderung der Winkel nicht stattfindet. Beide Bedingungen sind gleichzeitig erfüllt, d. h. die Projektion ist eine conforme, wenn

$$k_1 = k_2,$$

d. h.

$$\frac{a + f(e)}{r \cos(\beta - e)}\, m = \frac{f'(e)}{r},$$

woraus folgt

$$\frac{f'(e)}{a + f(e)} = \frac{m}{\cos(\beta - e)}.$$

Multipliciert man diese Gleichung mit de und integriert, so erhält man

$$\log_n (a + f(e)) = m \int \frac{de}{\cos(\beta - e)} = m \log_n \operatorname{tg}\left(45 - \frac{\beta - e}{2}\right) + C.$$

Schreibt man die Constante C in Form eines Logarithmus: $\log c$ und geht von den Logarithmen zu den Zahlen über, so wird:

$$\varrho = a + f(e) = c \operatorname{tg}\left(45 - \frac{\beta - e}{2}\right)^m.$$

1) S. *Gretschel*, Lehrbuch der Kartenprojektionen. pag. 252.

2) Um Misverständnissen vorzubeugen, sei hier ausdrücklich erwähnt, dass diese trapezförmigen Karten *nicht* zu den Kegelprojektionen zu zählen sind.

Da für $e = 0$ auch $f(e) = 0$ sein muss, so wird

$$a = c \operatorname{tg}\left(45 - \frac{\beta}{2}\right)^m,$$

demnach

$$\varrho = a\left(\frac{\operatorname{tg}\left(45 - \frac{\beta - e}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45 - \frac{\beta}{2}\right)}\right)^m.$$

Diese von *Lambert* in seinen Beiträgen (III pag. 135) angegebene Projektion heisst nach ihrem Erfinder *Lamberts conforme* Kegelprojektion.[1])

Da hiefür

$$\frac{f'(e)}{r} = \frac{m(a + f(e))}{r \cos(\beta - e)} = \frac{m a}{r \cos(\beta - e)}\left(\frac{\operatorname{tg}\left(45 - \frac{\beta - e}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45 - \frac{\beta}{2}\right)}\right)^m,$$

so findet man für das Vergrösserungsverhältnis bei dieser Projektion

$$k = \frac{a}{r}\,\frac{m\left(\frac{\operatorname{tg}\left(45 - \frac{\beta - e}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45 - \frac{\beta}{2}\right)}\right)^m}{\cos(\beta - e)}$$

oder wenn man die Poldistanz $p_0 = 90 - \beta$; $p = 90 - \beta + e$ einführt:

$$\left.\begin{aligned} \Theta &= m\lambda \\ \varrho &= a\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{p}{2}}{\operatorname{tg}\frac{p_0}{2}}\right)^m \\ k &= \frac{a}{r}\,\frac{m\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{p}{2}}{\operatorname{tg}\frac{p_0}{2}}\right)^m}{\sin p} \end{aligned}\right\}. \qquad (32)$$

Das Minimum der Vergrösserung findet statt, wenn der Ausdruck

$$k = \frac{a}{r}\,\frac{m}{\left(\operatorname{tg}\frac{p_0}{2}\right)^m}\,\frac{\left(\operatorname{tg}\frac{p}{2}\right)^m}{\sin p},$$

also der Ausdruck

$$A = \frac{\operatorname{tg}\frac{p}{2}^m}{\sin p}$$

1) *Lambert* leitet dieselbe direkt aus der Ähnlichkeit der unendlich kleinen Netztheile ab. — Es muss dann (s. Fig. 28) $\gamma'\delta' : \delta'\varepsilon' = \gamma\delta : \delta\varepsilon$, also wenn p die Poldistanz eines Punktes ist: $r' \sin p\, d\lambda : r' dp = \varrho m d\lambda : d\varrho$ und daraus

$$m\,\frac{dp}{\sin p} = \frac{d\varrho}{\varrho},$$

woraus durch Integration folgt

$$\log \varrho = m \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}p + C.$$

ein Minimum wird. Es ist

$$\frac{\partial A}{\partial p} = \frac{(m - \cos p) \operatorname{tg} \frac{p^m}{2}}{\sin p^2}.$$

Daher die Bedingung für das Minimum von A

$$\cos p = m,$$

und der Minimalwert von k selbst:

$$k' = \frac{a}{r} \frac{m}{\left(\operatorname{tg} \frac{p_0}{2}\right)^m} \frac{\left(\sqrt{\frac{1-m}{1+m}}\right)^m}{\sqrt{1-m^2}},$$

oder

$$k' = \frac{a}{r} \frac{m}{\left(\operatorname{tg} \frac{p_0}{2}\right)^m} \frac{\sqrt{(1-m^2)^{m-1}}}{(1+m)^m}.$$

Dabei ist noch m und a willkürlich, und aus der verschiedenen Wahl derselben gehen verschiedene Projektionen hervor.

1. Man kann m und a so bestimmen, dass der Kegel die Kugel in der Poldistanz p_0 berühren soll. Dann muss

$$a = r \operatorname{tg} p_0; \quad m = \cos p_0$$

und die Gleichungen (32) werden

$$\Theta = \lambda \cos p_0$$

$$\varrho = r \operatorname{tg} p_0 \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} p}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} p_0}\right)^{\cos p_0}.$$

2. Für eine Polarprojektion wird $p_0 = 0$, der Kegel geht in eine berührende Ebene über, und es wird:

$$\varrho = r \left(\frac{\operatorname{tg} p_0}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} p_0^{\cos p_0}}\right)_{p_0=0} \operatorname{tg} \frac{1}{2} p = \left(\frac{2 \sin \frac{1}{2} p_0 \cos \frac{1}{2} p_0}{\frac{\sin \frac{1}{2} p_0^{\cos p_0}}{\cos \frac{1}{2} p_0^{\cos p_0}}}\right)_{p_0=0} r \operatorname{tg} \frac{1}{2} p = 2 r \operatorname{tg} \frac{1}{2} p,$$

also

$$\Theta = \lambda$$

$$\varrho = 2 r \operatorname{tg} \frac{1}{2} p,$$

welches die Gleichungen der stereographischen Polarprojektion sind.

3. Geht der Kegel in einen Cylinder über, so wird der Abstand des Meridians von der Längendifferenz λ:

$$x = r \lambda.$$

Da die Halbmesser der Parallelen unendlich sind, so hat man den Abstand jedes Parallels vom Äquator zu bestimmen. Es ist aber ganz allgemein der Abstand eines Parallels von der Poldistanz p von demjenigen von der Poldistanz p_0:

$$y = \varrho - \varrho_0 = r \operatorname{tg} p_0 \left[\left(\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} p}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} p_0}\right)^{\cos p_0} - 1\right].$$

Dies geht für $p_0 = 90^0$ in die unbestimmte Form $0 \cdot \infty$ über; schreibt man es in der Form

$$y = \frac{r \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} p}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} p_0}\right)^{\cos p_0} - 1}{\cot p_0},$$

so wird y für $p_0 = 90^0$ die Form $\frac{0}{0}$ annehmen. Wenn aber für einen Wert $z = z_0$ der Bruch $y = \left\{\frac{f(z)}{f_1(z)}\right\}_{z=0} = \frac{0}{0}$ wird, so ist sein wahrer Wert

$$y = \left\{\frac{f'(z)}{f_1'(z)}\right\}_{z=z_0}.$$

Für den Wert von y folgt aber[1]):

$$\left(\frac{\partial \text{ Zähler}}{\partial p_0}\right)_{p_0=90^0} = \left[-\frac{\cos p_0}{2\cos\frac{1}{2}p_0^2}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}p}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}p_0}\right)^{\cos p_0}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}p_0}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}p}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}p_0}\right)^{\cos p_0}\log_n\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}p}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}p_0}\right)\sin p_0\right]_{90^0} = -\log_n \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}p$$

$$\left(\frac{\partial \text{ Nenner}}{\partial p_0}\right)_{p_0=90^0} = \left(-\frac{1}{\sin p_0^2}\right)_{90^0} = -1.$$

Da $y = \varrho - \varrho_0$ gesetzt wurde, so werden positive y entstehen, für $\varrho > \varrho_0$, also für den betrachteten Grenzfall, für südliche Breiten. Soll y für nördliche Breiten positiv sein, so muss $-y$ an Stelle von $+y$ gesetzt werden, und es wird:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\lambda \\ y &= r\log_n \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}p \end{aligned}\right\}. \tag{33}$$

Dieses sind die Gleichungen der gleich zu behandelnden *Mercator*'schen Projektion.

Lambert wählt in seiner Anwendung auf die Karte von Europa als mittleren Parallel, in welchem die Kugel berührt wird, denjenigen, dessen Poldistanz $41^0\,24'\,35''$ ist[2]), d. h. er macht $\cos p_0 = {}^3/_4$ und giebt hiefür eine Tafel für ϱ. Tafel 10 giebt die Werte von $\left(\operatorname{tg}\frac{p}{2}\right)^m$ nach p von Grad zu Grad fortschreitend von 0^0 bis 90^0 für $m = 0{\cdot}3$, $0{\cdot}4, \ldots 1{\cdot}0$. Hat man den Mittelpunkt der Karte, also den Wert von p_0 angenommen, und ebenso den Wert von m, so wird man für r eine Annahme machen, welche meist durch den gegebenen Massstab der Karte bestimmt ist, wodurch $a = r \operatorname{tg} p_0$ bekannt wird, womit man den Mittelpunkt der Parallelkreise findet, und von hier aus mit den mit Hilfe der Tafel 10 entnommenen Werten von $\left(\operatorname{tg}\frac{p}{2}\right)^m$ mit den Radien $a\frac{\left(\operatorname{tg}\frac{p}{2}\right)^m}{\left(\operatorname{tg}\frac{p_0}{2}\right)^m}$ die Parallelkreise ziehen. Zeichnet man dann einen Meridian, z. B. denjenigen, welcher der Längendifferenz 10^0 entspricht, mit Hilfe des zugehörigen Winkels $\Theta = m \cdot 10^0$ ein, wozu man sich wieder der Tafel 6 bedienen kann, für welche $\beta = 90 - p_0$

1) Nach der Formel $\frac{dy^x}{dt} = xy^{x-1}\frac{dy}{dt} + y^x \log_n y \frac{dx}{dt}$.

2) Beiträge III pag. 139.

zu nehmen ist, und ergänzt die übrigen durch Theilung des Intervalls, resp. durch Übertragen desselben nach aussen, so erhält man das Kartennetz für diese Projektionsmethode. Für $m = \frac{1}{2}$ wird es durch Fig. 39 veranschaulicht, wo also $\cos p_0 = \frac{1}{2}$, daher $p_0 = 60^0$, $\beta = 30^0$ ist.

4. Das Vergrösserungsverhältnis ist bei dieser Projektion in jedem Punkte unabhängig von der Richtung, aber in verschiedenen Punkten verschieden. Man kann m und a so bestimmen, dass dasselbe in zwei

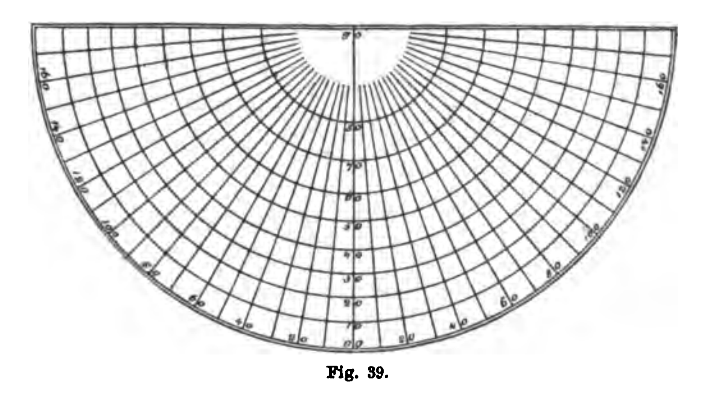


Fig. 39.

Parallelkreisen der Karte gleich 1 wird, wie es *Harding* für die Construktion seiner Himmelskarten wählte. Sind die Poldistanzen der beiden Parallelkreise p_1 und p_2, so muss:

$$\frac{a}{r}\frac{m}{\sin p_1}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{p_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{p_0}{2}}\right)^m = \frac{a}{r}\frac{m}{\sin p_2}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{p_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{p_0}{2}}\right)^m = 1$$

sein. Hieraus folgt

$$\frac{1}{\sin p_1}\left(\operatorname{tg}\frac{p_1}{2}\right)^m = \frac{1}{\sin p_2}\left(\operatorname{tg}\frac{p_2}{2}\right)^m,$$

oder

$$\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{p_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{p_2}{2}}\right)^m = \frac{\sin p_1}{\sin p_2},$$

demnach

$$m = \frac{\log\sin p_1 - \log\sin p_2}{\log\operatorname{tg}\frac{p_1}{2} - \log\operatorname{tg}\frac{p_2}{2}}. \tag{34}$$

Mit dem so erhaltenen Werte von m kann man endlich $\frac{a}{r}$ bestimmen. Da übrigens r ganz willkürlich ist, so kann man auch für a eine beliebige Annahme machen, welche sich aus der Grösse, die man der zu zeichnenden Karte geben will, bestimmt. Für $p_1 = 60^0$, $p_2 = 90^0$ ergiebt sich

$$m = 0{\cdot}6461089.$$

Auch *Lambert* wählt diese Projektion bereits für die Karte von Europa; er nimmt $p_1 = 60^0$, $p_2 = 20^0$ und findet $m = 0{\cdot}78327$. Doch

bemerkt er hierzu, dass, da dies der cos von $38^0 26'$ ist, man auch annehmen kann, dass der Kegel die Kugel in dieser Poldistanz berührt; diese Projektion ist also dem Wesen nach dieselbe wie die in 1) angeführte. Praktische Anwendung erhielt dieselbe bei der neuen Karte von Russland[1]) von *Khanikof*, welche sich zwischen den Parallelkreisen von 36^0 und 68^0 erstreckt. Die Masse sind erhalten in den Parallelen von 46^0 und 58^0 Breite; hieraus folgt $m = 0{\cdot}789464$; in den äussersten Breiten sind die Vergrösserungen 1·03123 und 1·04073. In der mittleren Breite von 52^0 ist dieselbe 0·99451, also (mit 5 Dec.) identisch mit der kleinsten Vergrösserung gleich 0·99451, welche in der Breite $\beta = 52^0 8' 8''$ stattfindet, deren sinus gleich m ist, woraus folgt, dass der Kegel die Kugel auch im Parallel von $52^0 8' 8''$ berührend gedacht werden kann.

J. F. W. Herschel schlägt diese Projektion in dem Journal of the Royal Geographical Society Bd. 30, Jahrg. 1860, als neu vor.[2]) Auch seine Ableitung ist nur eine Spezialisierung der im 4. Kapitel enthaltenen allgemeinen *Gauss*'schen Theorie, weshalb auf dieselbe hier nicht weiter eingegangen werden soll.

28. *F*) Für Cylinderprojektionen war gefunden:

$$k_1 = f'(\varphi)$$
$$k_2 = \frac{1}{\cos\varphi}$$
$$\operatorname{tg}\omega' = \frac{k_2}{k_1}\operatorname{tg}\omega.$$

Die Projektion wird daher eine conforme[3]), wenn

$$f'(\varphi) = \frac{1}{\cos\varphi}$$
$$f(\varphi) = \int\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \log_n \operatorname{tg}(45 + \tfrac{1}{2}\varphi) + C$$

oder

$$f(\varphi) = \tfrac{1}{2}\log_n\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} + C,$$

und die Gleichungen werden demnach, wenn für $\varphi = 0$ auch $f(\varphi) = 0$ werden soll, also $C = 0$ ist

$$\left.\begin{aligned} x &= r\lambda \\ y &= r\log_n \operatorname{tg}(45 + \tfrac{1}{2}\varphi)\end{aligned}\right\}. \qquad (33)$$

Die erste Abbildung nach dieser Projektionsmethode construierte der Niederländer *Gerhard Mercator* im Jahre 1569 in Duisburg. Eine

1) Bulletin de la société de géographie de Paris 1862. V. Serie Bd. 4 p. 185. „Sur la nouvelle carte de l'empire de Russie.“

2) On a new Projection of the sphere. l. c. pag. 100.

3) Das lineare Vergrösserungsverhältnis ist dann sec φ, die Flächenvergrösserung sec φ^2; die Werte derselben sind aus Tafel 11a zu entnehmen.

ausführliche Theorie gab er nicht, aber sein Princip drückt er in den Worten aus[1]): Gradus latitudinum versus utrumque polum paulatim auximus pro incremento parallelorum supra rationem, quam habent ad aequinoctialem. Ist b_φ die Länge eines Breitengrades in der Breite φ, l_φ diejenige des Längengrades, so ist auf der Kugel b_φ constant, nämlich r arc 1°, und l_φ veränderlich, nämlich

$$l_\varphi = r \cos \varphi \cdot \text{arc } 1^0,$$

folglich

$$\frac{b_\varphi}{l_\varphi} = \frac{1}{\cos \varphi}.$$

Auf der Karte soll nun dasselbe Verhältnis stattfinden; wenn aber die Bilder der Meridiane auf dem Äquator senkrecht stehende Gerade sein sollen, so wird für die Karte l_φ constant $= r$ arc 1° sein, und dann muss

$$b_\varphi = \frac{l_\varphi}{\cos \varphi} = \frac{r \text{ arc } 1^0}{\cos \varphi}.$$

Nach diesem Gesetze hat *Eduard Wright* um 1590 eine Karte construiert[2]); dieser selbst sagt, er habe seine Regel von der *Mercator'*schen abgeleitet. Da dieselbe sich aber nur auf endliche Strecken bezieht, und eine sprungweise Änderung involviert, so wird sie nur richtig, wenn man auf unendlich kleine Theile übergeht, für welchen Fall man l_φ als das unendlich kleine Increment des Längengrades $= r\,d\varphi$ und b_φ als das variable Increment des Breitengrades $= dy$ aufzufassen hat, woraus wieder die obige logarithmische Form folgt.[3]) Die hiernach angefertigten Karten, welche „*Mercator*'sche Karten", „*Seekarten*", „*Karten mit wachsenden Breiten*" oder „*reducierte Karten*" heissen, sind für die Seefahrer von besonderer Wichtigkeit, weshalb hier über dieselben noch einiges gesagt werden soll.

Der Seefahrer bestimmt den Ort seines Schiffes nur von Zeit zu Zeit durch astronomische Beobachtungen. Kennt er jedoch die Richtung seines Curses und die Geschwindigkeit, mit welcher das Schiff fährt, so wird er auch jederzeit im Stande sein, den Ort seines Schiffes anzugeben. Die Geschwindigkeit bestimmt er durch das

---

1) In seinem 1594 erschienenen „Atlas sive Cosmographiae meditationes" sind die meisten Karten in dieser Projektion. Hat z. B. der Kartenmittelpunkt die Breite 40°, so drückt *Mercator* das Gesetz in den Worten aus: „Meridiani distant ratione 40. paralleli ad circulum maximum". Dass es keine rechteckigen Plattkarten sind, sieht man sofort bei Vergleichung der Abstände der einzelnen Parallelen.

2) In seinem Werke „Correction of errors in navigation." S. *Halley* „An easy demonstration of the logarithmic tangents to the Meridian line" in den Philos. Trcts für 1695—97 (Bd. 18) pag. 202.

3) Diese hat (s. *Halley* l. c.) zuerst *Henry Bond* 1645 gegeben und *James Gregory* in seinen „Exercitationes Geometricae" bewiesen.

Log, ein hölzernes Dreieck, dessen Basis mit Blei ausgelegt ist, damit es aufrecht schwimmt; an demselben ist die Logleine, eine lange Schnur befestigt, die in gleiche Theile getheilt ist, von denen jeder etwas kleiner als $\frac{1}{120}$ einer Seemeile ist. Ein solcher Theil heisst ein *Knoten*. Um den vom Schiff in einer Stunde zurückgelegten Weg zu bestimmen, lässt man die Logleine durch eine halbe Minute ablaufen. Multipliziert man die Länge des abgelaufenen Stückes, welche den in einer halben Minute zurückgelegten Weg angeben würde, wenn das Logbrett im Wasser unbeweglich stehen würde, mit 120, so erhält man den in einer Stunde zurückgelegten Weg. Da aber 120 Knoten auf eine Seemeile gehen, so folgt die Regel: so viele Knoten die Logleine beim Ablaufen in einer halben Minute angiebt, so viele Seemeilen legt das Schiff per Stunde zurück. Nun ist eine Seemeile gleich 1855^m; also müsste ein Knoten gleich $15^m.46$ sein. Allein das Logbrett behält nicht vollkommen seinen Ort bei, sondern folgt dem Schiffe, und die unter Voraussetzung obiger Länge des Knotens erhaltene sogenannte *gesegelte* Distanz würde erfahrungsmässig in dem Verhältnisse 1 : 1·05 zu klein werden. Man macht daher die Länge eines Knotens 15·46 : 1·05, also $14{\cdot}7^m$, und dann wird die angegebene gesegelte Distanz mit Rücksicht auf obigen Erfahrungscoëfficienten sofort in Seemeilen erhalten. Es ist noch zu erwähnen, dass man die Zählung nicht gleich beim Auswerfen des Logs beginnen darf, sondern dass man so lange warten muss, bis das Logbrett sich ausserhalb des Kielwassers des Schiffes befindet. Diese Entfernung wird durch Versuche bestimmt, und dann durch eine Marke an der Logleine bezeichnet, von welcher aus die Knotentheilung aufgetragen ist. Man lässt zur Bestimmung der Fahrgeschwindigkeit demnach die Logleine von der Kurbel ablaufen. Das durch 30 Sekunden nach dem Erscheinen der Marke abgelaufene Stück, ausgedrückt in Knoten, giebt die von dem Schiffe in einer Stunde gesegelte Distanz, ausgedrückt in Seemeilen.[1])

Die Cursrichtung bestimmt der Seefahrer durch den Compass, welcher ihm die Richtung des Meridians angiebt. So lange die Nadel der Boussole auf denselben Compassstrich (Windstrich oder Rhumb) zeigt, wird der Curs des Schiffes unverändert derselbe geblieben sein, da der Winkel, welchen die Cursrichtung mit dem Meridian einschliesst, für alle Punkte derselbe bleibt. Das Schiff fährt aber dann nicht in der kürzesten Linie, dem grössten Kreis, denn die Eigenschaft, dass er in jedem seiner Punkte mit dem Meridiane denselben

1) Natürlich wird aus verschiedenen leicht bemerkbaren Gründen die mit Hilfe des Log erhaltene gesegelte Distanz immer nur genähert sein, daher auch der erhaltene Ort nur genähert. Es müssen daher diese Bestimmungen zeitweise durch astronomische Beobachtungen controlliert werden.

Winkel einschliesst, kommt nur zwei grössten Kreisen zu, nämlich dem Meridian selbst (der Winkel selbst gleich Null) und dem Äquator (der Winkel gleich 90°). Die Linie, welche das Schiff bei ungeändertem Compassstrich verfolgt, ist jene, welche zwischen zwei Punkten der Kugel so gezogen wird, dass sie mit den Meridianen stets denselben Winkel einschliesst; diese Linie heisst *Loxodrome*. Es ist nun für die Schifffahrt von grosser Wichtigkeit[1]), dass das Bild dieser Curve auf der Karte eine Gerade wird, denn wo immer sich auch das Schiff befindet (z. B. durch einen Sturm verschlagen): wenn der Schiffer einmal den Ort seines Schiffes durch astronomische Beobachtungen bestimmt hat, so braucht er nur den Ort auf einer Karte der genannten Eigenschaft einzutragen, mit dem Orte, nach welchem er fahren soll, durch eine Gerade zu verbinden, so erhält er das Bild der einzuschlagenden Linie und der Winkel, welchen diese Gerade mit dem Meridian bildet, giebt ihm den Compassstrich, nach welchem er zu fahren hat. Hierzu sind aber zwei Bedingungen zu erfüllen. 1. Muss eine in der Karte gezogene Gerade die sämmtlichen Meridiane unter demselben Winkel schneiden und 2. muss der abgelesene Winkel auch der wahre, von den beiden Linien auf der Kugel eingeschlossene Winkel sein. Die erste Bedingung wird erfüllt, wenn die Meridiane parallele Gerade sind; daher schon seit den frühesten Zeiten für Seekarten Plattkarten verwandt wurden. Allein die zweite Bedingung wird nicht für alle Plattkarten erfüllt, denn die Bedingung sagt aus, dass die Abbildung eine conforme sein muss, und dieses findet nur für die *Mercator*'sche Projektion statt.

Man kann aus der Eigenschaft, dass die Loxodrome sich in der zu suchenden Projektion als gerade Linie darstellt, auch die Gleichungen derselben unmittelbar ableiten.[2]) Sei α (Fig. 40) der Winkel, welchen die Loxodrome mit dem Meridiane einschliesst, so folgt aus dem Elementardreiecke abc:

Fig. 40.

$$\cot \alpha = \frac{bc}{ab} = \frac{r\, d\varphi}{r \cos \varphi\, d\lambda},$$

oder

$$d\lambda = \operatorname{tg} \alpha \frac{d\varphi}{\cos \varphi}. \qquad \text{(m)}$$

Auf der Karte ist, wenn die Y-axe den ersten Meridian vorstellt

$$\frac{dy}{dx} = \cot \alpha,$$

demnach

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r\, d\varphi}{r \cos \varphi\, d\lambda}.$$

---

1) So lange die Schifffahrt nach ungeändertem Compassstrich erfolgt. In neuester Zeit wurde jedoch wegen der nicht unbedeutenden Differenz der Länge vom grössten Kreise, dieser zur Schifffahrt vorgeschlagen. S. hierüber § 18.

2) Eigentlich enthält diese Ableitung nichts anderes als die Bedingung der Conformität für constante Entfernung der geradlinigen Meridiane.

Da für die Meridiane

$$x = r\lambda$$

ist, demnach

$$dx = r\,d\lambda,$$

so wird[1])

$$dy = r\,\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

$$y = r\log_n \operatorname{tg}(45 + \tfrac{1}{2}\varphi).$$

---

1) Für das Rotationsellipsoid, dessen grosse Axe A, dessen Excentricität ε ist, ist bekanntlich der Halbmesser des Parallelkreises in der geographischen Breite φ:

$$r_1 = \frac{A\cos\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin\varphi^2}}$$

und der Krümmungshalbmesser des Meridians ebendaselbst:

$$r_2 = \frac{A(1-\varepsilon^2)}{\sqrt{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^3}}.$$

Da nun

$$bc = r_2\,d\varphi; \qquad ab = r_1\,d\lambda$$

ist, so wird

$$\cot\alpha = \frac{bc}{ab} = \frac{1-\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)\cos\varphi}\,\frac{d\varphi}{d\lambda}.$$

Soll α constant sein, so wird bei der Integration der hieraus folgenden Gleichung

$$d\lambda = \operatorname{tg}\alpha\,\frac{(1-\varepsilon^2)\,d\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)\cos\varphi}$$

$\operatorname{tg}\alpha$ als constanter Faktor anzusehen sein, und es wird (s. § 48)

$$\lambda - \lambda_0 = \operatorname{tg}\alpha\log_n\left[\operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{1-\varepsilon\sin\varphi}{1+\varepsilon\sin\varphi}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\right] \tag{35a}$$

die Gleichung der Loxodrome für das Ellipsoid. Zur Rectification derselben hat man

$$ds = bc\sec\alpha = \sec\alpha\cdot\frac{A(1-\varepsilon^2)\,d\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

oder (s. § 33)

$$s = \sec\alpha\left[A\,E(\varphi,\varepsilon) + A\varepsilon^2\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)}}\right].$$

Für die Ebene ist

$$\frac{dy}{dx} = \cot\alpha = \frac{1-\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)\cos\varphi}\,\frac{d\varphi}{d\lambda}$$

und da

$$x = r\lambda; \qquad dx = r\,d\lambda,$$

so wird

$$dy = \frac{r(1-\varepsilon^2)\,d\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)\cos\varphi}.$$

r bestimmt den Massstab der Karte, und nimmt man $r = A$, so wird

$$\left.\begin{aligned} x &= A\lambda \\ y_1 &= A\log_n\left[\operatorname{tg}\left(45+\frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{1-\varepsilon\sin\varphi}{1+\varepsilon\sin\varphi}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\right]\end{aligned}\right\}. \tag{33a}$$

Aus der Gleichung für dy ersieht man ferner, dass

$$ds = \sec\alpha\cdot dy,$$

folglich

$$s = (y_1 - y_0)\sec\alpha.$$

Aus der Gleichung (m) folgt durch Integration:

$$\lambda - \lambda_0 = \operatorname{tg} \alpha \log_n \operatorname{tg} (45 + \tfrac{1}{2}\varphi) \tag{35}$$

und dieses ist die Gleichung der Loxodrome auf der Kugel.[1]) Man sieht aus derselben, dass es zu jedem Werte von φ nur *einen* Wert von λ giebt, d. h. jeder Parallelkreis wird von der Loxodrome nur *einmal* geschnitten; da aber jedem Werte von λ unendlich viele Werte von φ gehören, indem $\lambda - \lambda_0$ identisch ist mit $\lambda - \lambda_0 + 2\sigma\pi$ und jedem der Werte $\lambda - \lambda_0 + 2\sigma\pi$ ein gewisser Wert von φ entspricht, so wird jeder Meridian unendlich oft geschnitten. Für $\varphi = 90^0$ würde $\lambda = \infty$ werden, d. h. der Pol kann von der Loxodrome nie erreicht werden; dieselbe ist daher eine Art sphärischer Spirale, welche sich unendlich oft um den Pol windet, dem sie sich asymptotisch nähert, ohne ihn je zu erreichen.

Soll eine Loxodrome durch zwei Punkte gelegt werden, deren Längen und Breiten $\lambda'\varphi'$; $\lambda''\varphi''$ sind, so genügt sie den Gleichungen:

$$\lambda' - \lambda_0 = \operatorname{tg} \alpha \log_n \operatorname{tg} \left(45 + \frac{\varphi'}{2}\right)$$

$$\lambda'' - \lambda_0 = \operatorname{tg} \alpha \log_n \operatorname{tg} \left(45 + \frac{\varphi''}{2}\right),$$

es wird also

$$\lambda'' - \lambda' = \operatorname{tg} \alpha \log_n \frac{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi''}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi'}{2}\right)}.$$

Hat man daher auf der Karte den Massstab auf der X-axe wie bei der Kugel denjenigen längs der Y-axe nach (33a) construiert, so wird die wahre Länge eines Bogens genau so gefunden, wie es oben angegeben ist. Um den Massstab auf der Y-axe auftragen zu können, dient die Correktionsgrösse ξ, welche bei Tafel 11 neben dem Werte von $\log_n \operatorname{tg} (45 + \frac{1}{2}\varphi)$ angegeben ist, indem

$$y_1 = A\,[\log_n \operatorname{tg} (45 + \tfrac{1}{2}\varphi) - \xi]$$

ist, wenn

$$\xi = e^2 \sin \varphi + \tfrac{1}{3} e^4 \sin \varphi^3$$

(s. § 48).

1) Für die rechteckige Plattkarte war

$$x = a\lambda$$
$$y = b\varphi,$$

woraus

$$\lambda = \frac{x}{a}; \quad \varphi = \frac{y}{b}$$

folgt; in dieser Projektion wird folglich die Gleichung der Loxodrome

$$\frac{x - x_0}{a} = \operatorname{tg} \alpha \log_n \frac{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{1}{2}\frac{y}{b}\right)}{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{1}{2}\frac{y_0}{b}\right)}.$$

Für die quadratische Plattkarte ist $a = b$ zu setzen.

Das Differential des Bogens der Loxodrome ist

$$ds = bc \sec\alpha = r\,d\varphi \sec\alpha,$$

demnach

$$s = r\,(\varphi'' - \varphi') \sec\alpha.$$

Ist α nur mässig, so wird man leicht nach dieser Formel rechnen können; ist aber α nahe 90^0, so wird $(\varphi'' - \varphi')$ sehr klein, $\sec\alpha$ sehr gross und die Formel ungenau. Es folgt aber:

$$s = r\,(\varphi'' - \varphi')\sqrt{1 + \operatorname{tg}\alpha^2} = r(\varphi'' - \varphi')\sqrt{1 + \frac{(\lambda'' - \lambda')^2}{\left[\log_n \dfrac{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi''}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi'}{2}\right)}\right]^2}}\,.$$

Ist dabei die Differenz $\varphi'' - \varphi'$ nur klein, so kann man setzen:

$$\operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi''}{2}\right) = \operatorname{tg}\left[45 + \tfrac{1}{2}(\varphi'' + \varphi') + \tfrac{1}{2}(\varphi'' - \varphi')\right]$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\left[45 + \frac{1}{2}(\varphi'' + \varphi')\right] + \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi'' - \varphi')}{1 - \operatorname{tg}\left[45 + \frac{1}{2}(\varphi'' + \varphi')\right]\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi'' - \varphi')}$$

$$\operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi'}{2}\right) = \operatorname{tg}\left[45 + \tfrac{1}{2}(\varphi'' + \varphi') - \tfrac{1}{2}(\varphi'' - \varphi')\right]$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\left[45 + \frac{1}{2}(\varphi'' + \varphi')\right] - \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi'' - \varphi')}{1 + \operatorname{tg}\left[45 + \frac{1}{2}(\varphi'' + \varphi')\right]\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi'' - \varphi')};$$

daher, wenn man für den Augenblick

$$45 + \tfrac{1}{2}(\varphi'' + \varphi') = \varphi$$
$$\tfrac{1}{2}(\varphi'' - \varphi') = x$$

setzt:

$$\frac{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi''}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi'}{2}\right)} = \frac{1 + \dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}\varphi}}{1 - \dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}\varphi}} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}x\operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}x\operatorname{tg}\varphi} = \frac{1 + \operatorname{tg}x(\operatorname{tg}\varphi + \cot\varphi) + \operatorname{tg}x^2}{1 - \operatorname{tg}x(\operatorname{tg}\varphi + \cot\varphi) + \operatorname{tg}x^2}$$

$$= \frac{\sec x^2 + 2\operatorname{tg}x \operatorname{cosec}2\varphi}{\sec x^2 - 2\operatorname{tg}x\operatorname{cosec}2\varphi} = \frac{1 + \sin 2x \operatorname{cosec}2\varphi}{1 - \sin 2x\operatorname{cosec}2\varphi}$$

$$\log_n \frac{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi''}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi'}{2}\right)} = \log_n\left(\frac{1 + \sin 2x\operatorname{cosec}2\varphi}{1 - \sin 2x\operatorname{cosec}2\varphi}\right)$$

$$= 2\,\frac{\sin 2x}{\sin 2\varphi} + \tfrac{2}{3}\left(\frac{\sin 2x}{\sin 2\varphi}\right)^3 + \tfrac{2}{5}\left(\frac{\sin 2x}{\sin 2\varphi}\right)^5 + \cdots$$

folglich bis auf Glieder dritter Ordnung genau

$$\lambda'' - \lambda' = 2\operatorname{tg}\alpha\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi'' - \varphi')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi'' + \varphi')} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{\varphi'' - \varphi'}{\cos\frac{1}{2}(\varphi'' + \varphi')},$$

daher

$$s = r\sqrt{(\varphi'' - \varphi')^2 + (\lambda'' - \lambda')^2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi'' + \varphi')^2},$$

was übrigens auch aus der Betrachtung des Dreiecks abc für endliche, aber sehr kleine Strecken folgt. Wenn daher α sehr nahe 0 ist, so wird

$$s = r\,(\lambda'' - \lambda')\cos\tfrac{1}{2}(\varphi'' + \varphi').$$

Auf den nach der *Mercator*'schen Projektion gezeichneten Karten kann man auf höchst einfache Weise graphisch die zwischen zwei Punkten enthaltene Distanz bestimmen. Zu diesem Zwecke ist sowol in der Richtung der Längen als auch in derjenigen der Breiten ein Rand mit einer entsprechend feinen Theilung versehen, welche in der Richtung der Längen *gleichmässig* fortschreitet und zwar ist der Grad in 60 Theile getheilt, so dass ein Theil gleich einer Seemeile ist[1]); in der Richtung der Breiten aber nach dem Gesetze der wachsenden Breiten, und zwar so, dass auch für die kleinsten auf dem Massstabe enthaltenen Unterabtheilungen dasselbe Gesetz (also das logarithmische) gilt. Zur Construktion dieses Massstabes dient die Tafel 11[2]), welche die Werte von $\frac{\log_n \operatorname{tg}(45 + \frac{1}{2}\varphi)}{\operatorname{arc} 1'}$ für φ von 10 zu 10 Minuten fortschreitend giebt. Das Kartennetz wird natürlich nicht von Minute zu Minute gezeichnet, sondern nur von Grad zu Grad; behufs Anfertigung des Massstabes für die Breiten schien es jedoch zweckmässig die y auch für die Zwischenparallelkreise anzugeben; dabei ist die Bogenminute als Einheit angenommen, daher auch λ in der Formel $x = r\lambda$ in Bogenminuten auszudrücken.

Hat man nun auf der *Mercator*'schen Karte (Fig. 41) die Länge einer in der Richtung der Parallelkreise liegenden Strecke ab zu suchen, so nimmt man ein in der Höhe von ab zur einen Hälfte über, zur andern unter ab liegendes Stück des Massstabes II in den Cirkel und trägt es, so oft es geht, auf ab ab; den Rest misst man am Massstabe II in der geographischen Breite von ab. (In Fig. 41 wurde das Stück $\gamma_1\gamma_2 = 8^0$ viermal abgetragen, und der Rest in der Gegend von $\gamma = 5^0$ gefunden, daher $ab = 37^0$ des Äquators gleich 555 geographische oder 2220 Seemeilen.) Der Grund hierzu liegt darin, dass bei diesen Karten der Massstab in jedem Punkte nach allen Richtungen derselbe ist, also in der Richtung ab derselbe Massstab wie im Punkte a oder b senkrecht dazu, also der Massstab in γ gilt. Da die von den Seefahrern zu messenden Längen nicht allzu gross sind, so genügt es ein in der Nähe von γ (am besten zu beiden Seiten gleich vertheilt) befindliches Stück als Massstab zu verwenden. Für die Strecke a_1b_1 in der Richtung der Meridiane hat man den Massstab II zu verwenden. Man zieht durch a_1, b_1 die Parallelkreise, zählt die Anzahl der zwischen den beiden befindlichen Bogenminuten des Massstabes II; die erhaltene Zahl giebt die Anzahl der Seemeilen. (Für a_1b_1 in Fig. 41 hat man $\alpha\beta = 22^0 = 1320$ Seemeilen.)

Für die Länge einer in einer anderen Richtung liegenden gesegelten Distanz AB, die natürlich mit der Loxodrome zusammenfällt, hat man:

$$s = r(\varphi'' - \varphi') \sec \alpha.$$

1) 1′ des Äquators = 1 Seemeile.

2) Von den Engländern *table of meridional parts* genannt.

Nun ist $r(\varphi'' - \varphi')$ die wahre Länge des zwischen den beiden Parallelkreisen von der geographischen Breite φ' und φ'' enthaltenen Meridians, also die wahre Länge von AC. Liest man also die *wahre Länge* von AC auf dem Massstab II ab[1]), nimmt die abgelesene Länge nach dem Massstab I in den Cirkel und trägt sie von A nach C' auf, so hat man dann

$$s = AC' \sec \alpha = AB',$$

wenn $B'C' \parallel BC$ ist.

Liegt AB so schief gegen die Meridiane, dass die Schnitte BC, $B'C'$ nur unsicher werden, so ist es besser die Länge BC, wenn sie

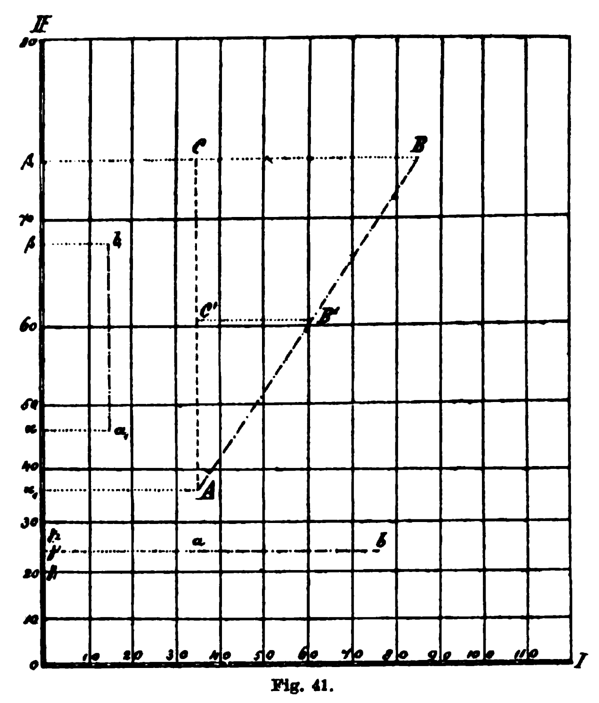


Fig. 41.

nicht zu gross ist, mit einem ihrer Mitte entsprechenden Stücke des Massstabes II zu messen, oder, wenn sie zu lang ist, dieselbe in einzelne kleinere Stücke zu theilen, und jedes einzelne durch den seinem Mittelpunkte entsprechenden Massstab (dem Massstab II in dieser Breite zu entnehmen) zu messen.

Die wahre Grösse eines Winkels wird natürlich unmittelbar der Karte entnommen.

In ähnlicher Weise lassen sich nun alle Aufgaben der gemeinen Schifferrechnung auf den *Mercator*'schen Karten graphisch lösen. Hat man z. B. den Ort eines Schiffes zu einer gewissen Zeit in A durch

1) Es ist $AC = 38^0$ des Massstabes II; $AC' = 38^0$ des Massstabes I; $AB' = 46^0$ des Massstabes I, also $AB = 2760$ Seemeilen.

astronomische Beobachtungen bestimmt und eingetragen; kennt man ferner den Curs des Schiffes und den bis zu einer anderen Zeit zurückgelegten Weg (nach dem Logbuche), so wird man zunächst nach dem gegebenen Curse des Schiffes die Richtung seiner Bewegung AB eintragen. Trägt man jetzt AB' gleich dem *wahren Werte* des zurückgelegten Weges (Massstab I) ein, zieht $B'C'$ parallel zum Massstabe I, liest auf diesem den Wert von AC' ab, und trägt von A nach dem Massstabe II die abgelesene wahre Grösse von AC' auf, so giebt die durch C parallel zu $C'B'$ gezogene Parallele auf AB den gesuchten Ort des Schiffes. Zu bemerken ist noch, dass die Karten in dieser Projektion nicht bis zum Pole fortgesetzt werden können, da für $\varphi = 90^0$ $y = \infty$ wird; dies ist aber für die Seekarten nicht als Nachtheil zu betrachten, indem man ja bis zum Pole ohnedies nicht kommt, und man bis zum 85. Grad mit diesen Karten immer ausreicht.

29. Ausser den erwähnten Cylinderprojektionen, bei denen gemäss ihrer Entstehungsweise aus einem Kegel, dessen Spitze mit der Erdaxe zusammenfällt, auch die Erzeugenden parallel zur Erdaxe sind, giebt es ausnahmsweise noch andere Darstellungsarten, für welche diese Bedingung nicht gilt. Der Cylinder berührt dann die Kugel nicht im Äquator, sondern im Meridian des Kartenmittelpunktes. Sei A (Fig. 42a) der Mittelpunkt des darzustellenden Flächentheiles, AP der Meridian des Ortes, welcher in der Zeichnungsfläche angenommen ist, so dass also die Erzeugenden senkrecht stehen auf der Zeichnungsfläche. Schneidet man dann den Cylinder längs einer Erzeugenden auf und breitet ihn in eine Ebene aus, so wird das Bild von AP eine Gerade Ax werden, während alle anderen Meridiane und die Parallelkreise durch krumme Linien dargestellt werden. Man kann, um die Gleichungen für diese Cylinderprojektionen herzustellen, zunächst auf ein anderes Netz übergehen, welches sich genau in derselben Weise auf den Kreis AP und den Pol B desselben bezieht, wie die früheren Projektionen auf den Äquator und dessen Pol. Sei Ax' (Fig. 42b) das Bild des Kreises AP, so werden die durch B gehenden gleiche Winkel mit einander einschliessenden grössten Kreise als äquidistante auf Ax senkrechte Gerade erscheinen.

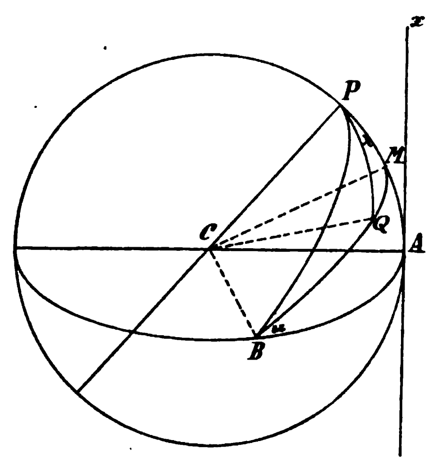


Fig. 42a.

Für einen Kreis BM hat man die Entfernung auf der X-axe $A'M' = AM = x = ru$ (gezählt auf dem ersten Meridian vom Kartenmittelpunkt gegen den Pol zu), wenn r der Halbmesser der Kugel ist. Ist dann für einen Punkt Q der Winkelabstand $MCQ = \psi$, so wird man für die Projektion Q' haben

$$M'Q' = rf(\psi),$$

und je nach der Wahl der Funktion f wird man verschiedene Projektionsmethoden erhalten. Die Gleichungen für diese Cylinderprojektionen werden demnach:

$$\left.\begin{aligned} x &= ru \\ y &= rf(\psi) \end{aligned}\right\} . \quad (36\,\text{a})$$

Statt der zweiten Gleichung kann man auch schreiben

$$\psi = F\left(\frac{y}{r}\right),$$

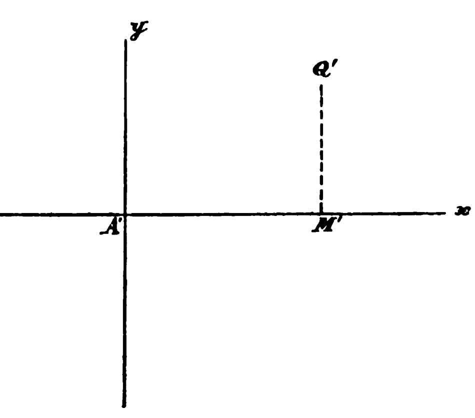


Fig. 42b.

wobei F die inverse Funktion ist, welche aus f erhalten wird, indem man ψ aus der Gleichung $y = rf(\psi)$ bestimmt.

Um nun u und ψ durch die Längendifferenz und geographische Breite zu ersetzen, hat man in den sphärischen Dreiecken BPQ, die Seiten

$$BQ = 90 - \psi; \quad QP = 90 - \varphi; \quad BP = 90^0$$

und die Winkel

$$BPQ = 90 - \lambda; \quad PBQ = 90 - (\beta + u),$$

weil $APB = 90^0$ ist, da der durch den Pol von AP gehende grösste Kreis auf AP senkrecht steht, und da AP gleich dem Complement der geographischen Breite β von A, also $90 - \beta$, demnach

$$PBQ = PBA - QBA = 90 - \beta - u = 90 - (\beta + u).$$

Man hat sonach die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \sin\psi &= \cos\varphi \sin\lambda \\ \cos\psi \cos(\beta + u) &= \cos\varphi \cos\lambda \\ \cos\psi \sin(\beta + u) &= \sin\varphi \end{aligned}\right\} . \quad (36\,\text{b})$$

Für die Vergrösserung und Verzerrung gilt das bereits früher (§ 22) gesagte, nur hat man überall den dort vorkommenden Grössen die entsprechende veränderte Bedeutung zu geben. Man hat demnach für das Vergrösserungsverhältnis in der Richtung der

$x : k_1 = f'(\psi)$; in der Richtung der $y : k_2 = \sec\psi$; für die Flächenvergrösserung $k = f'(\psi)\sec\psi$ und für die Verzerrung:

$$\operatorname{tg}\omega' = \frac{\operatorname{tg}\omega}{f'(\psi)\cos\psi}.$$

Setzt man oben $u = \frac{x}{r}$; $\psi = F\left(\frac{y}{r}\right)$ ein, so ergiebt sich

$$\sin\varphi = \cos F\left(\frac{y}{r}\right)\sin\left(\beta + \frac{x}{r}\right), \tag{37}$$

welche Gleichung von λ unabhängig, und daher die Gleichung des Parallelkreises von der Breite φ ist. Die Division der beiden ersten Gleichungen (36b) giebt:

$$\cot\lambda = \cot F\left(\frac{y}{r}\right)\cos\left(\beta + \frac{x}{r}\right), \tag{38}$$

welche Gleichung, da sie von φ unabhängig ist, die Gleichung des Meridians von der Länge λ ist.

Wenn $\beta = 0$, so wird

$$\sin\psi = \cos\varphi\sin\lambda$$
$$\cos\psi\cos u = \cos\varphi\cos\lambda$$
$$\cos\psi\sin u = \sin\varphi.$$

Die Gleichung der Parallelkreise ist

$$\sin\varphi = \cos F\left(\frac{y}{r}\right)\sin\frac{x}{r}.$$

Die Gleichung der Meridiane

$$\cot\lambda = \cot F\left(\frac{y}{r}\right)\cos\frac{x}{r}.$$

a) Der Cylinder berührt im ersten Meridian und die Projektion ist eine perspektivische aus dem Centrum. Es ist

$$x = ru; \quad y = r\operatorname{tg}\psi,$$

demnach

$$\cot\frac{x}{r} = \cot\varphi\cos\lambda$$

$$y = r\frac{\cos\varphi\sin\lambda}{\sqrt{\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2\cos\lambda^2}} = \frac{r\cos\varphi\sin\lambda}{\sqrt{1 - \cos\varphi^2\sin\lambda^2}}.$$

Diese Projektion rührt von *J. Wetch* her (s. *Gretschel* Lehrbuch der Kartenprojektionen pag. 131 und *Germain* traité des projections des cartes geographiques pag. 213).

b) Schneidet man die Kugel durch Ebenen, welche parallel sind zur Ebene der Berührungscurve des umhüllenden Cylinders, also hier des Meridians des Kartenmittelpunktes, und sieht man die Schnittlinien mit dem Cylinder als Projektionen der Schnittlinien mit der Kugel an, so wird

$$y = r\sin\psi,$$

demnach $f(\psi) = \sin\psi$ und es ist demnach

$$\cot \frac{x}{r} = \cot \varphi \cos \lambda$$

$$y = r \cos \varphi \sin \lambda.$$

Eine Tafel für die Werte von $\frac{x}{r}$ und $\frac{y}{r}$ findet sich bei *Lambert*[1]), der diese Projektion in Vorschlag brachte; *Gretschel* nennt sie *Lamberts isocylindrische Transversalprojektion.*[2]) Da für diese Projektion $f'(\psi) = \cos \psi$, also $K = 1$ ist, so gehört sie zu den im nächsten Kapitel zu behandelnden äquivalenten. Es ist jedoch zu bemerken, dass bei derselben für weiter vom Mittelpunkte entfernte Punkte der Karte die Massstäbe stark variieren und zwar k_1 und k_2 im entgegengesetzten Sinne; daher wird diese Projektion keine guten Bilder geben, was auch aus Fig. 37 folgt, welche dieser Projektion angehört, wenn die Netzlinie nicht das System der Meridiane und Parallelkreise, sondern dasjenige der Höhenkreise und Almucantaracs darstellt. Deshalb wurde auch die Tafel für die x und y nicht aufgenommen. Die Netzcurven sind auch nicht besonders einfach; man hat für dieselben:

$$\sin \psi = \frac{y}{r}; \quad \cos \psi = \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - y^2}; \quad \cot \psi = \frac{1}{y} \sqrt{r^2 - y^2}$$

also für die Parallelkreise

$$\sin \varphi = \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - y^2} \cdot \sin \frac{x}{r},$$

für die Meridiane

$$\cot \lambda = \frac{1}{y} \sqrt{r^2 - y^2} \cdot \cos \frac{x}{r}.$$

Eine Zeichnung des Netzes giebt *Gretschel* (Fig. 16); eine Anwendung davon könnte man für die Darstellung von Ländern machen, die sich längs eines Meridians erstrecken; doch wäre hier vielleicht auch eine Modifikation der später zu erwähnenden *Sanson*'schen (in der Weise, dass der Äquator durch den Meridian der Kartenmitte ersetzt wird) vorzuziehen.

c) Lambert's conforme Cylinderprojektion.[3]) Dieselbe ist gleichartig mit der *Mercator*'schen, nur berührt der Cylinder nicht längs des Äquators, sondern längs des ersten Meridians; natürlich kann man auch den Pol des letzteren nicht auf der Karte verzeichnen.

---

1) Beiträge III pag. 182; ein Abdruck davon bei *Gretschel* l. c. pag. 127.

2) S. auch *Germain* l. c. pag. 86.

3) *Lambert* (s. seine Beiträge III pag. 160) stellte die Aufgabe: Äquator und erster Meridian sollen geradlinig sein, der letztere in gleiche Theile getheilt werden, und dabei die Abbildung conform. Er löst die Aufgabe durch unendliche Reihen, die er dann summiert.

Die Gleichungen dieser Projektion sind:

$$x = ru$$

$$y = r \log_n \operatorname{tg}\left(45 + \frac{\psi}{2}\right) = \frac{r}{2} \log_n \frac{1 + \sin\psi}{1 - \sin\psi},$$

daher

$$\cot\frac{x}{r} = \cot\varphi \cos\lambda$$

$$y = \frac{r}{2} \log_n \frac{1 + \cos\varphi \sin\lambda}{1 - \cos\varphi \sin\lambda}.$$

Die Werte von x und y sind für $r = 1$ in Tafel 12 zusammengestellt.

Es ist für diese Projektion[1])

$$k_1 = k_2 = \sec\psi;$$

$$K = \sec\psi^2; \quad \operatorname{tg}\omega' = \operatorname{tg}\omega.$$

Die Meridiane und Parallelkreise sind aber hier krumme Linien, die sich jedoch wegen der Eigenschaft der Conformität unter rechten Winkeln schneiden.

Fig. 43 stellt das Netz dar. P ist das Bild des Poles; AB stellt den ersten, CD den 90. Meridian vor; die durch A und B zu CD

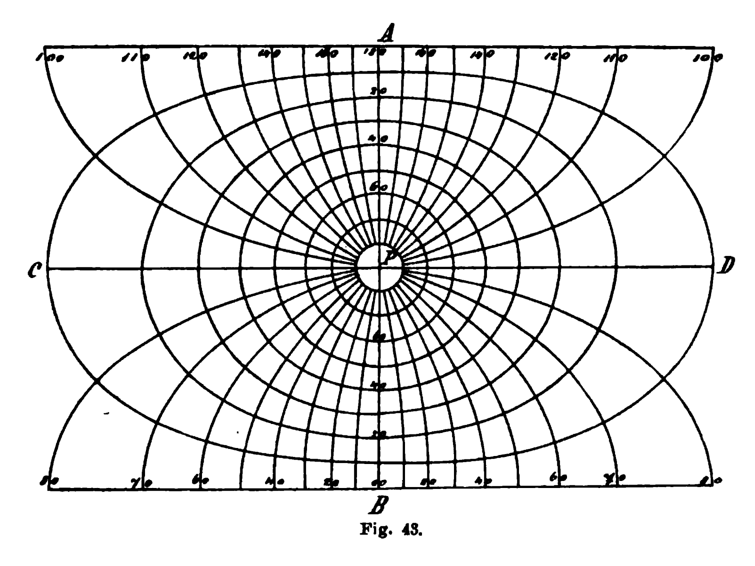


Fig. 43.

parallel gezogenen Geraden stellen den Äquator vor, der Punkt des Äquators, dessen Länge 90° ist, fällt in unendliche Entfernung. Um die Gleichungen der Netzlinien abzuleiten, hat man, wenn man Kürze halber x, y statt $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ setzt:

1) Siehe § 28.

$$\frac{1 + \cos\varphi \sin\lambda}{1 - \cos\varphi \sin\lambda} = e^{2y} = \frac{e^y}{e^{-y}}$$

$$\cos\varphi \sin\lambda = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

$$\cot\varphi \cos\lambda = \cot\frac{x}{r}.$$

Eliminiert man hieraus λ, indem man die erste durch $\cos\varphi$, die zweite durch $\cot\varphi$ dividiert, quadriert und addiert, so wird

$$\left(\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}\right)^2 + \sin\varphi^2 \cot x^2 = \cos\varphi^2$$

als Gleichung des Parallelkreises von der Breite φ. Eliminiert man φ, so hat man zunächst, wenn die zweite Gleichung in die erste dividiert wird:

$$\sin\varphi \operatorname{tg}\lambda = \operatorname{tg} x \left(\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}\right).$$

Dividiert man die erste durch $\sin\lambda$, die letzte durch $\operatorname{tg}\lambda$, quadriert und addiert, so wird

$$\left(\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}\right)^2 (1 + \cos\lambda^2 \operatorname{tg} x^2) = \sin\lambda^2.$$

Diese Projektionsmethode wird von *Germain* (l. c. pag. 210) als *orthomorphe cylindrische Projektion* von *Lambert* bezeichnet; sie eignet sich recht gut für grosse, in der Richtung von Nord nach Süd sich erstreckende Theile der Erdoberfläche, die aber nur eine geringe Ausdehnung von Ost nach West haben; in diesem Falle werden nämlich die Entfernungen ψ vom Meridian nur sehr klein, daher $\sec\psi$ nur wenig von der Einheit verschieden. Zur Darstellung von Seekarten ist sie aber nicht geeignet, weil die Loxodrome nicht als Gerade erscheint, da es die Meridiane nicht sind.

d) Es sei β beliebig und

$$x = ru$$
$$y = r\psi,$$

so wird

$$\cot\left(\beta + \frac{x}{r}\right) = \cot\varphi \cos\lambda$$

$$\sin\frac{y}{r} = \cos\varphi \sin\lambda.$$

Da $F\left(\frac{y}{r}\right) = \frac{y}{r}$, so wird die Gleichung der Parallelkreise

$$\sin\varphi = \cos\frac{y}{r} \sin\left(\beta + \frac{x}{r}\right)$$

und die Gleichung der Meridiane

$$\cot\lambda = \cot\frac{y}{r} \cos\left(\beta + \frac{x}{r}\right).$$

Nimmt man hier $\frac{x}{r}$ und $\frac{y}{r}$ als kleine Bögen an, entwickelt nach Potenzen derselben und bleibt bei der zweiten Potenz stehen, so wird

$$\sin\varphi = \left(1 - \frac{y^2}{2r^2}\right)\left[\sin\beta\left(1 - \frac{x^2}{2r^2}\right) + \cos\beta\cdot\frac{x}{r}\right]$$

$$= \sin\beta\left(1 - \frac{x^2}{2r^2} - \frac{y^2}{2r^2}\right) + \cos\beta\cdot\frac{x}{r}$$

oder

$$(x^2 + y^2 - 2r^2) - 2xr\cot\beta + 2r^2\frac{\sin\varphi}{\sin\beta} = 0,$$

welches die Gleichung eines Kreises ist.

Für die Meridiane hat man

$$\cot\lambda\cdot\frac{y}{r} = \left(1 - \frac{y^2}{2r^2}\right)\left[\cos\beta\left(1 - \frac{x^2}{2r^2}\right) - \sin\beta\cdot\frac{x}{r}\right]$$

$$= \cos\beta\left[1 - \frac{x^2}{2r^2} - \frac{y^2}{2r^2}\right] - \sin\beta\,\frac{x}{r}$$

oder

$$(x^2 + y^2 - 2r^2) + 2rx\operatorname{tg}\beta + 2ry\cot\lambda\sec\beta = 0$$

also ebenfalls die Gleichung eines Kreises. [1])

In dieser nach ihm benannten Projektion hat *César François Cassini de Thury* (1714—1784) die grosse Karte von Frankreich, die von seinem Sohne *Jean Dominique Cassini* und *Maraldi* fortgesetzt, und 1793 vollendet wurde [2]), gezeichnet. Der erste Meridian, längs welchem der Cylinder die Kugel berührt, ist der Meridian der Sternwarte von Paris; dieser Punkt selbst ist Anfangspunkt der Messung; die Meridiane und Parallelkreise sind nicht verzeichnet, sondern nur die beiden sich rechtwinklig schneidenden Systeme von Geraden.

Thatsächlich ist diese sog. *Cassini*'sche Projektion nichts anderes als eine Art Plattkarte, und *Tissot* wählt für dieselbe auch (pag. 136 und 162) den Namen *Transversalplattkarte.*

Dieselbe wurde unter anderem auch für die 1816 begonnene Militäraufnahme der österreichisch-ungarischen Monarchie verwendet. [3])

---

1) *Gretschel* erhält statt dessen für die Meridiane Parabeln (l. c. pag. 126). Schreibt man die Gleichung $\operatorname{tg}\frac{y}{r} = \operatorname{tg}\lambda\cos\left(\beta + \frac{x}{r}\right)$, so wird $\frac{y}{r} = \cos\beta\operatorname{tg}\lambda\left(1 - \frac{x^2}{2r^2}\right) - \sin\beta\operatorname{tg}\lambda\cdot\frac{x}{r}$, also eine Parabel. S. auch *Fiorini* l. c. pag. 449.

2) S. Description géometrique de la France par *Cassini de Thury* 1783 (pag. 8). Der Name *Cassini*'sche Projektion ist aber auch durchaus nicht am Platze. *Fiorini* führt (l. c. pag. 449) eine 1670 in dieser ausgeführte Karte von Japan an. Übrigens sind die dem Mittelalter entstammenden Compasskarten sämmtlich in dieser Projektion gezeichnet.

3) S. die „Instructionen für die bei der astronomisch-trigonometrischen Landesvermessung und im Calcülbureau des kk. militär-geographischen Institutes angestellten Individuen" 1845 pag. 182 und *Ganahl*: „Über die Berechnung der neuen Militäraufnahmen und Spezialkartenblätter" 1876.

Da aber die Darstellung nur dann hinreichend genau wird, wenn der darzustellende Theil der Erdoberfläche nicht zu ausgedehnt wird, so wurden bei dieser Darstellung die Länder auf mehrere Axensysteme bezogen, während bei der älteren 1807 begonnenen Aufnahme für die ganze Monarchie nur ein einziges Axensystem, dessen Ursprung Wien (Stefansthurm) war, angenommen wurde. Bei der eben erwähnten von 1816 galt als Ursprung:

1. Für Niederösterreich, Mähren, Schlesien und Dalmatien: Wien (Stefansthurm).

2. Für Böhmen, Oberösterreich und Salzburg: Gusterberg bei Kremsmünster.

3. Für Galizien: der trigonometrische Punkt Löwenburg bei Lemberg.

4. Für die Bukowina: der westliche Endpunkt der bei Radautz gelegenen Grundlinie.

5. Für Steiermark: der trigonometrische Punkt Schökl.

6. Für Kärnthen, Krain, Görz, das Küstenland, Istrien und das ungarische Littorale: der trigonometrische Punkt Krimberg bei Laibach.

7. Für Tirol: Innsbruck (Pfarrthurm).

8. Für Ungarn: Ofen (Sternwarte).

9. Für Kroatien und Slavonien, dann die westlichen 6 Grenzregimenter: der trigonometrische Punkt Kloster Ivanić.

10. Für die übrigen 8 Grenzregimenter und das Tittler Bataillon: Ofen (Sternwarte).

Ebenso wurde diese Projektion für die Karte von England von *H. James* in Anwendung gebracht (s. Account of the Methods and processes adopted for the production of the Maps of the ordnance survay of the united kingdom; by Lieutnant General Sir *Henry James* 1875 pag. 14).

Die Unzulänglichkeit derselben für die Darstellung grösserer Ländercomplexe, wie z. B. der österreichisch-ungarischen Monarchie erforderten aber bald die Wahl einer anderen Projektionsmethode. Hierfür wählte man anfänglich in Österreich die äquivalente *Mercator*'sche Projektion (s. §. 41), später die vom königlich preussischen topographischen Bureau bereits früher angewandte sogenannte *Polyëderprojektion.*[1]) Denkt man sich auf der Erdkugel äquidistante Parallelkreise und Meridiane gezogen, so erhält man auf derselben ein Netz von Maschen, dessen Elemente man als geradlinig begrenzt ansehen kann, wenn die Entfernung der Parallelen und Meridiane genügend klein ist; es kömmt dies darauf hinaus, dass man durch die Eckpunkte jeder der Netzmaschen eine Ebene legt,

1) *Zöppritz*, Leitfaden der Kartenentwurfslehre pag. 99.

und den von den vier Netzlinien begrenzten Flächentheil central auf dieselbe projiciert. Wegen der Kleinheit der einzelnen Seiten des auf diese Weise entstehenden, der Kugel eingeschriebenen Polyëders, kann man die Projektion mit dem Originale verwechseln. Mit Rücksicht auf den vorgeschriebenen Aufnahmsmassstab von 1 : 75 000 und die geographische Lage von Österreich ergaben sich als zweckmässige Dimensionen eines Kartenblattes $\frac{1}{4}$ Grad des Meridians und $\frac{1}{2}$ Grad des Parallelbogens.

Jedes dieser sogenannten *Gradkartenblätter* wird demnach als ein Trapez erscheinen, dessen Seiten bis auf, für die Darstellung verschwindend kleine Grössen gleich sind den Meridian- und Parallelbögen der Erde. Fügt man eine Reihe dieser Blätter aneinander, deren Mittelpunkte im selben Meridiane liegen (nach Colonnen), so werden die beiden Begrenzungsmeridiane eine gerad-gebrochene Linie bilden, welche sich jedoch dem Auge als eine stetig gekrümmte Curve darstellen wird, von der Form der Meridiane der *Sanson*'schen Projektion (s. § 34). Reiht man hingegen Blätter aneinander, deren Mittelpunkte dieselbe geographische Breite haben (nach Zonen), so erhält man das Bild einer Zone, deren Begrenzung ebenfalls eine gerad-gebrochene Linie ist, die sich dem Auge als eine Kreislinie darstellen wird. Die Zusammenstellung zweier Zonen muss dann notwendig ein Klaffen längs der Parallelen, die Zusammenstellung von Colonnen ein Klaffen längs der Meridiane ergeben; doch wird dasselbe erst bei einer sehr grossen Anzahl von Blättern merklich.

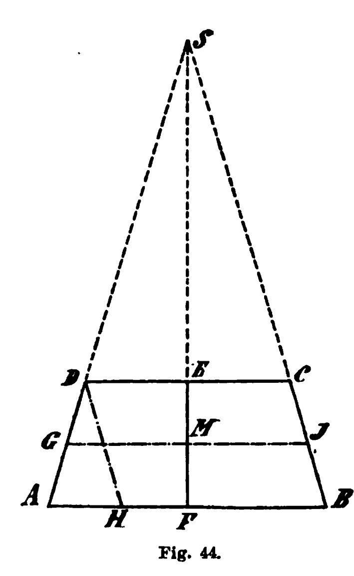


Fig. 44.

Um diese Verhältnisse näher zu beleuchten, folgen wir dem von *J. Frischauf* im „Jahrbuch des österreichischen Touristenclubs" 1881 (12. Bd.) eingeschlagenen Weg.[1]) Seien (Fig. 44) $A, B, C, D,$ vier Punkte der Kugel, von denen A, B in einem Parallelkreise liegen, dessen Breite $\beta - \frac{\varepsilon}{2}$, C, D in einem Parallel, dessen Breite $\beta + \frac{\varepsilon}{2}$ ist, so also, dass der Meridianbogen zwischen den Punkten A und D zu einem Centriwinkel ε gehört, und der mittlere Parallel GI die Breite β hat. Ferner sollen A, D und B, C je auf einem Meridian liegen, und es sei die Längendifferenz der beiden Meridiane λ.

1) „Die Projectionsmethode der Spezialkarte der österreichisch-ungarischen Monarchie im Massstabe 1 : 75000."

Auf der Kugel hat man dann

$$\text{arc } AB = r \cos\left(\beta - \frac{\varepsilon}{2}\right) \lambda$$

$$\text{arc } CD = r \cos\left(\beta + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \lambda$$

$$\text{arc } AD = r\lambda.$$

Legt man durch die vier Punkte A, B, C, D eine Ebene, und betrachtet von derselben das trapezförmige Stück $ABCD$, so wird für dasselbe

$$AB = 2r \cos\left(\beta - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin \tfrac{1}{2} \lambda$$

$$CD = 2r \cos\left(\beta + \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin \tfrac{1}{2} \lambda$$

$$AD = BC = 2r \sin \tfrac{1}{2} \varepsilon$$

also, wenn man λ und ε als kleine Grössen erster Ordnung ansieht, und in der Entwickelung bis zur 3. Potenz derselben geht:

$$\left.\begin{aligned} \text{arc } AB - AB &= r \cos\beta \frac{\lambda^3}{24} \\ \text{arc } CD - CD &= r \cos\beta \frac{\lambda^3}{24} \\ \text{arc } AD - AD &= r \cdot \frac{\varepsilon^3}{24} \end{aligned}\right\} . \qquad (\alpha)$$

Zieht man $DH \parallel CB$, so ist

$$\sin \tfrac{1}{2} ADH = \frac{\tfrac{1}{2} AH}{AD} = \frac{\tfrac{1}{2}(AB - DC)}{AD}$$

$$= \frac{r\left[\cos\left(\beta - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \cos\left(\beta + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right] \sin \tfrac{1}{2} \lambda}{2r \sin \tfrac{1}{2} \varepsilon}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} ADH = \sin \tfrac{1}{2} \lambda \sin \beta$$

Ist S der Schnittpunkt von AD und BC, und EF der Abstand der beiden Parallelen, GM der mittlere Parallel, so ist

$$EF = AD \cos \tfrac{1}{2} ADH$$

$$GI = \tfrac{1}{2}(AB + CD)$$

$$MS = GM \cot \tfrac{1}{2} ADH,$$

demnach

$$AD - EF = AD\,(1 - \cos \tfrac{1}{2} ADH) = 2AD \sin \tfrac{1}{4} ADH^2$$

$$GI = r \sin \tfrac{1}{2} \lambda \left[\cos\left(\beta - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \cos\left(\beta + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right]$$

$$= 2r \sin \tfrac{1}{2} \lambda \cos \frac{\varepsilon}{2} \cos \beta$$

$$MS = \frac{r \sin \tfrac{1}{2} \lambda \cos \tfrac{1}{2} \varepsilon \cos \beta}{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} ADH}$$

Setzt man den Winkel $\tfrac{1}{2} ADH = \omega$, so dass der Winkel, unter welchem der äusserste Meridian des Kartenblattes die Parallelkreise schneidet, gleich $90 - \omega$ ist, so wird:

$$\sin \omega = \sin \tfrac{1}{2} \lambda \sin \beta$$

oder

$$\omega - \tfrac{1}{6}\omega^3 = (\tfrac{1}{2} \lambda - \tfrac{1}{48} \lambda^3) \sin \beta;$$

daher, wenn man in den Gliedern dritter Ordnung den genäherten Wert $\omega = \frac{1}{2} \lambda \sin \beta$ einsetzt:

$$\omega = \tfrac{1}{48} \lambda^3 \sin \beta^3 + \tfrac{1}{2} \lambda \sin \beta - \tfrac{1}{48} \lambda^3 \sin \beta,$$

woraus folgt

$$\omega = \tfrac{1}{2}\lambda \sin \beta - \tfrac{1}{48}\lambda^3 \sin \beta \cos \beta^2. \qquad (\beta)$$

$$AD - EF = 2AD \sin \tfrac{1}{2}\omega^2 = \tfrac{1}{2} AD\, \omega^2 = r \sin \tfrac{1}{2} \varepsilon \cdot \tfrac{1}{4}\lambda^2 \sin \beta^2$$

$$\left.\begin{aligned} AD - EF &= \tfrac{1}{8} r \varepsilon \lambda^2 \sin \beta^2 \\ \text{arc}\, AD - EF &= \tfrac{1}{8} r \left(\frac{\varepsilon^3}{3} + \varepsilon \lambda^2 \sin \beta^2\right) \end{aligned}\right\} \qquad (\gamma)$$

$$GI = 2r\,(\tfrac{1}{2}\lambda - \tfrac{1}{48}\lambda^3)\,(1 - \tfrac{1}{8}\varepsilon^2) \cdot \cos \beta$$

$$GI = r \cos \beta\,(\lambda - \tfrac{1}{8}\varepsilon^2 \lambda - \tfrac{1}{24}\lambda^3). \qquad (\delta)$$

Die Länge des mittleren Parallels auf der Kugel ist

$$p = r \cos \beta \cdot \lambda,$$

folglich die Verkürzung des mittleren Parallels

$$p - GI = \tfrac{1}{8} r \cos \beta \cdot \lambda\ [\varepsilon^2 + \tfrac{1}{3}\lambda^2]. \qquad (\delta')$$

Endlich

$$MS = \tfrac{1}{2} \frac{r \cos \beta\, \lambda\, (1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 - \frac{1}{24}\lambda^2)}{\omega + \frac{1}{3}\omega^3}$$

$$= \frac{r \cos \beta\, (1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 - \frac{1}{24}\lambda^2)}{\sin \beta\, (1 - \frac{1}{24}\lambda^2 \cos \beta^2 + \frac{1}{12}\lambda^2 \sin \beta^2)}$$

$$MS = r \cot \beta\, [1 - \tfrac{1}{8}\varepsilon^2 - \tfrac{1}{8}\lambda^2 \sin \beta^2] \qquad (\varepsilon)$$

Aus (γ) folgt, dass die Verkürzung der Meridiane auf einem Kartenblatte von der dritten Ordnung der Breiten und Längendifferenz der äussersten Netzlinie ist.[1]) Die Gleichung (β) zeigt, dass die Abweichung des Winkels, welchen die Netzlinien einschliessen, von 90^0 von derselben Ordnung ist, wie die Längendifferenz der äussersten Meridiane. Ist diese letztere, wie es bei den österreichischen Gradkartenblättern der Fall ist, ein halber Grad, so wird für die Breite 48^0:

$$\omega = 11'$$

Nach (δ') ist die Verkürzung des Bogens des Parallelkreises ebenfalls von der dritten Ordnung der Kartendimensionen; vernachlässigt man daher die dritten Potenzen von ε und λ, so wird

$$AB = \text{arc}\, AB$$
$$CD = \text{arc}\, CD$$
$$AD = \text{arc}\, AD,$$
$$EF = \text{arc}\, AD$$
$$GI = \text{dem mittleren Parallel der Kugel}$$
$$\omega = \tfrac{1}{2} \lambda \sin \beta$$

---

1) Dieselben im Bogenmasse für den Halbmesser 1 angesehen; arc $1^0 = 0{\cdot}01745$.

Reiht man mehrere Blätter an einander, für welche die begrenzenden Parallelkreise dieselbe Breite haben, so wird die Gesammtheit derselben eine gerad-gebrochene Linie sein, welche sich dem Auge als ein Kreisbogen vom Halbmesser MS darstellen wird. Ein im Kartenmittelpunkte berührender Kegel würde als Halbmesser ϱ desselben ergeben

$$\varrho = r \cot \beta$$

und es ist folglich

$$\varrho - MS = r \cot \beta \, [\tfrac{1}{8} \varepsilon^2 + \tfrac{1}{8} \lambda^2 \sin \beta^2]. \qquad (\varepsilon')$$

demnach bis auf Grössen erster Ordnung ebenfalls zu vernachlässigen.

Polyconische Projektionen.

30. Wenn nur schmale Zonen der Erdoberfläche zur Darstellung kommen, so wird man durch die Kegelprojektionen jedenfalls eine viel genauere Darstellung erhalten, als durch die perspektivischen Projektionen. Ist aber die darzustellende Zone breiter, so werden in denjenigen Parallelkreisen, welche von den im richtigen Verhältnisse zu den Meridianen dargestellten weiter entfernt sind, grössere Abweichungen stattfinden, und das Bild bedeutendere Verzerrungen aufweisen. Es ist dann besser, die Zone in kleinere Theile zu theilen, und jede einzelne so zu behandeln, als würde nur sie darzustellen sein; es wird also jede auf einen Kegel abgebildet, der dann in eine Ebene ausgebreitet wird. Von der Art des Abbildungsgesetzes wird auch die Form der Projektion abhängen, die, dem Grundgedanken der Abbildung auf eine Reihe von Kegeln entsprechend, als *polyconische* Projektion bezeichnet werden kann. Würde man aber jede einzelne Zone in dieser Weise darstellen, so wäre es nicht möglich, die einzelnen Zonen an einander zu schieben, indem zwischen den einzelnen Zonen immer Klaffungen bleiben würden. Um diesem Übelstande vorzubeugen, theilt man in unendliche viele, unendlich schmale Zonen, und diese Darstellungen sind es, welche mit dem Namen *polyconische Projektionen* belegt werden. Die Gesammtheit der Parallelkreise bedeckt dann die ganze Kartenfläche continuierlich, indem die Klaffungen unendlich klein bleiben.

Sei (Fig. 45) S der Mittelpunkt des Parallels von der Breite φ, S' derjenige von der Breite $\varphi + d\varphi$. Ist die von einem beliebigen Anfangspunkte O gezählte Länge $OS = s$, so ist $SS' = -(OS' - OS) = -ds$. Seien M, M' Punkte desselben Meridians der Länge λ auf den beiden Parallelkreisen; ferner $OSM = \vartheta$, $SM = \varrho$, so wird die Projektion bestimmt sein, wenn ϱ und s als Funktion der Breite φ, und ϑ als Funktion von φ und λ gegeben sind. Es wird daher ganz allgemein

$$s = f_1(\varphi); \quad \varrho = f_2(\varphi)$$
$$\vartheta = F(\varphi, \lambda)$$

sein, und

$$S'M' - SM = d\varrho$$
$$OS'M' - OSM = \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi}\, d\varphi$$

weil λ für die Punkte M, M' denselben Wert hat, also als Constante anzusehen ist, folglich die Winkeländerung $OS'M' - OSM$ allein durch die Änderung von φ bewirkt wird.

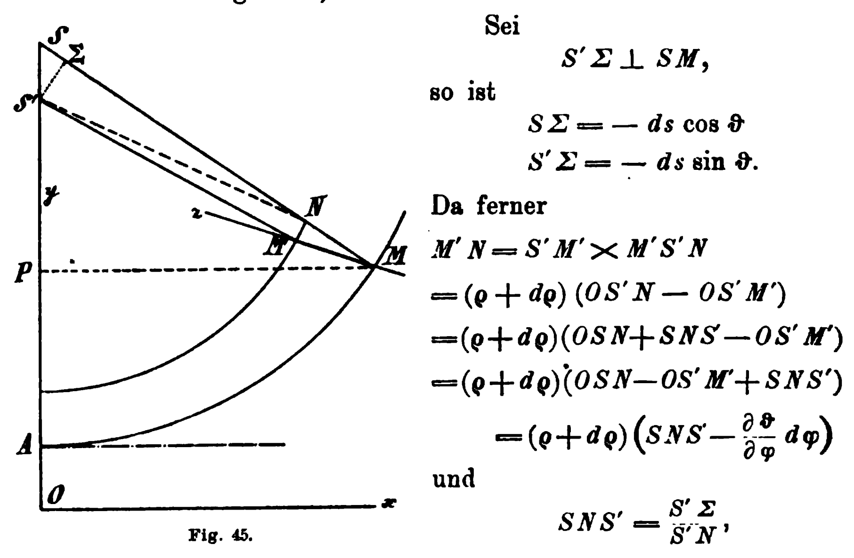


Fig. 45.

Sei

$$S'\Sigma \perp SM,$$

so ist

$$S\Sigma = -\, ds \cos\vartheta$$
$$S'\Sigma = -\, ds \sin\vartheta.$$

Da ferner

$$\begin{aligned} M'N &= S'M' \times M'S'N \\ &= (\varrho + d\varrho)\,(OS'N - OS'M') \\ &= (\varrho + d\varrho)(OSN + SNS' - OS'M') \\ &= (\varrho + d\varrho)(OSN - OS'M' + SNS') \\ &= (\varrho + d\varrho)\left(SNS' - \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi}\, d\varphi\right) \end{aligned}$$

und

$$SNS' = \frac{S'\Sigma}{S'N},$$

so ist mit Vernachlässigung von unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung (d. h. beim Übergang zur Grenze)

$$M'N = -\, ds \sin\vartheta - \varrho \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi}\, d\varphi.$$

Es ist ebenfalls beim Übergang zur Grenze (für unendlich kleine $d\varphi$)

$$S\Sigma + \Sigma N + NM = S\Sigma + S'M' + NM = SM,$$

daher

$$NM = SM - S'M' - S\Sigma$$

oder

$$NM = -\, d\varrho + ds \cos\vartheta.$$

Da endlich für unendlich kleine $d\varphi$ die Linien MN, $M'N$ aufeinander senkrecht stehen und als geradlinig anzusehen sind, so wird

$$\operatorname{tg} M'MN = \frac{M'N}{MN} = \frac{-\, ds \sin\vartheta - \varrho \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi}\, d\varphi}{-\, d\varrho + ds \cos\vartheta}.$$

Bezeichnet man daher den Winkel $NM'M$, welchen das Bild des Meridians mit dem Bilde des Parallelkreises in irgend einem Punkte M einschliesst, mit $90 - \Theta$, so wird

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\varrho \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi}\, d\varphi + ds \sin\vartheta}{d\varrho - ds \cos\vartheta} = \frac{\varrho \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} + \frac{ds}{d\varphi} \sin\vartheta}{\frac{d\varrho}{d\varphi} - \frac{ds}{d\varphi} \cos\vartheta}. \tag{39}$$

Um die Vergrösserungsverhältnisse in der Richtung der Meridiane und Parallelen zu erhalten, hat man zu beachten, dass das Bogenelement des Kartenmeridians

$$MM' = MN \sec \Theta = -(d\varrho - ds \cos \vartheta) \sec \Theta$$

ist; für die Kugel ist das Element des Meridians $r d\varphi$, daher das Vergrösserungsverhältnis in der Richtung der Meridiane[1])

$$k_m = -\frac{1}{r}\left(\frac{d\varrho}{d\varphi} - \frac{ds}{d\varphi} \cos \vartheta\right) \sec \Theta. \qquad (40a)$$

Endlich ist der Bogen des Parallels der Karte zwischen den Meridianen von der Länge λ und $\lambda + d\lambda$:

$$\varrho \frac{\partial \vartheta}{\partial \lambda} d\lambda,$$

weil hier in $F(\varphi, \lambda)$ die Breite φ als constant anzusehen ist, und da auf der Kugel das entsprechende Element $r \cos \varphi d\lambda$ ist, so ist

$$k_p = \frac{\varrho}{r \cos \varphi} \frac{\partial \vartheta}{\partial \lambda}. \qquad (40b)$$

Für die Flächenvergrösserung hat man

$$K = k_m k_p \sin (90 - \Theta) = -\frac{\varrho}{r^2 \cos \varphi}\left(\frac{d\varrho}{d\varphi} - \frac{ds}{d\varphi} \cos \vartheta\right) \frac{\partial \vartheta}{\partial \lambda}. \qquad (40c)$$

Von den zahlreichen polyconischen Projektionen, welche man durch verschiedene Wahl der Funktionen $f_1 f_2 F$ erhalten kann, sollen hier nur die wichtigsten erwähnt werden.

a) Die **gewöhnliche oder äquidistante polyconische Projektion.** Auf dem ersten Meridian werden die Breitengrade in wahrer Grösse aufgetragen, und die Halbmesser der Parallelkreise sind gleich den Seiten der in jedem Parallel der Kugel umschriebenen Kegel. Hieraus folgt, dass

$$\varrho = r \cot \varphi.$$

Wählt man O (Fig. 45) in dem Durchschnittspunkte des Äquators und ersten Meridians, so ist die Entfernung des Durchschnittspunktes A eines Parallelkreises der Karte mit dem ersten Meridian von O gleich dem Meridianbogen auf der Kugel, daher gleich $r\varphi$ und

$$OS = s = OA + AS = r\varphi + r \cot \varphi = r(\varphi + \cot \varphi),$$

folglich

$$s = r(\varphi + \cot \varphi)$$
$$\varrho = r \cot \varphi.$$

---

1) Hier sind k_m, k_p nicht mit k_1, k_2 identisch, wenn nicht $\Theta = 0$ ist. Das negative Zeichen rührt daher, dass mit wachsenden Breiten ϱ und s abnehmen, also $\frac{d\varrho}{d\varphi}$, $\frac{ds}{d\varphi}$ selbst negativ sind.

Für jede einzelne Zone gilt ferner die für die Kegelprojektionen gefundene Gleichung $\vartheta = m\lambda$, wo $m = \sin\varphi$, so dass man hier

$$\vartheta = \lambda \sin\varphi$$

hat. Es ist demnach

$$\frac{\partial s}{\partial \varphi} = r\,(1 - \operatorname{cosec}\varphi^2) = -\,r \cot\varphi^2$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} = -\,r \operatorname{cosec}\varphi^2$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} = \lambda \cos\varphi, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \lambda} = \sin\varphi;$$

daher

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\Theta &= \frac{\lambda \sin\varphi - \sin(\lambda \sin\varphi)}{\cos(\lambda \sin\varphi) - \sec\varphi^2} = \frac{\vartheta - \sin\vartheta}{\cos\vartheta - \sec\varphi^2} \\ k_m &= \operatorname{cosec}\varphi^2\,(1 - \cos\varphi^2 \cos\vartheta)\sec\Theta \\ k_p &= 1 \end{aligned}\right\}, \qquad (41)$$

woraus folgt, dass längs der Parallelkreise wahre Längen erscheinen. Die Construktion des Netzes kann in folgender Weise vorgenommen werden. Ist AP (Fig. 46) der erste Meridian, AM der Äquator, so trägt man auf beiden die Länge eines Bogens von 10 Äquatorgraden (gleich 10° des Meridians), wenn die Netzlinien von 10° zu 10° gezogen werden sollen, für den als Halbmesser der abzubildenden Kugel anzunehmenden Radius, auf. Ist AO dieser Halbmesser, $BOm = \varphi$, so ist $Am' = r\cot\varphi$. Ist also $An = r\varphi$, $nn' = Am'$, so ist n' der Mittelpunkt des durch n gehenden Parallels. Trägt man auf diesen die Werte $\varrho\,.\,\mathrm{arc}\,(10^0 \sin\varphi) = r\,\mathrm{arc}\,(10^0 \cos\varphi)$ auf, wobei man arc $(10^0 \cos\varphi)$ mit dem Argumente $\beta = 90 - \varphi$ aus Tafel 6a entnehmen kann, und verbindet die auf den verschiedenen Parallelkreisen zu gleichen Längendifferenzen gehörigen Endpunkte, so erhält man die Meridiane.

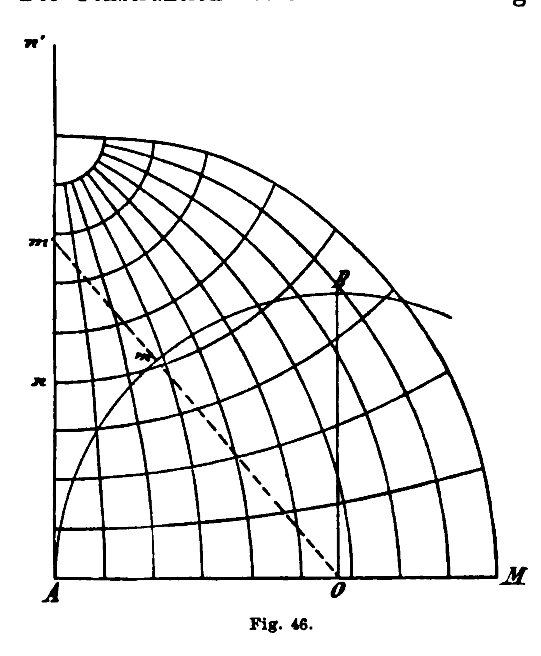


Fig. 46.

Will man sich zum Zeichnen der Netzlinien auf der Karte nicht der reinen Construktion bedienen, so kann man die Tafel 13 benützen, welche für jeden Breitengrad in der Columne ϱ den Wert $\frac{\cot\varphi}{\mathrm{arc}\,1^0}$

giebt, in welcher also der Äquatorgrad als Einheit genommen ist. Desgleichen giebt die zweite mit g_φ überschriebene Columne den Wert von $\cos\varphi$. Nimmt man als Länge des Äquatorgrades eine Strecke a an, und trägt diese auf dem ersten Meridian wiederholt ab, so erhält man die Schnittpunkte desselben mit den einzelnen Parallelen; von diesen trägt man die Werte von ϱ aus Tafel 13 (multipliciert mit der Länge a des Grades[1]) gegen den Pol zu auf, und erhält so die Mittelpunkte der Parallelen. Hierauf wird man die einzelnen Werte von g_φ aus Tafel 13 entnehmen, mit a multiplicieren, auf dem Parallel der Breite φ mehrmals abtragen und schliesslich die sich entsprechenden Punkte der verschiedenen Parallelen durch stetige Linienzüge verbinden, welche die Bilder der Meridiane sind.

Man kann hier auch ohne besondere Mühe auf die Excentricität der Meridianellipse der Erde Rücksicht nehmen. Sei wieder die Länge des Äquatorgrades als Einheit angenommen, so ist die Länge eines Meridiangrades in der Breite φ

$$\frac{A(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}} = l_\varphi$$

und die Länge des Grades des Parallelkreises

$$\frac{A\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}} = l'_\varphi.$$

Um nun das Netz zu zeichnen, trägt man zunächst für $\varphi = 0^0, 1^0, 2^0, \ldots$ die Werte von l_φ successive auf dem ersten Meridian auf, und von den erhaltenen Theilpunkten in der Richtung gegen den Pol zu die Werte

$$\varrho_\varphi = \frac{A\cot\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}}\,\frac{1}{\operatorname{arc} 1^0},$$

wodurch man die Mittelpunkte der Parallelen der Karte erhält. Sind diese verzeichnet, so trägt man auf jeden den seiner Breite entsprechenden Wert von l'_φ wiederholt auf, und erhält durch Verbindung der entsprechenden Theilpunkte die Meridiane. Zur Construktion kann man sich der Tafel 14 bedienen, welche mit dem Argumente φ die Werte l_φ, l'_φ und ϱ_φ für $A = 1$ giebt. Der 90. Meridian ist nun zwar kein genauer Kreis, kann aber mit hinreichender Genauigkeit als solcher angesehen werden, wodurch dann die Construktion noch etwas vereinfacht wird, indem zuerst die Parallelkreise und der 90. Meridian gezeichnet und dann die auf den einzelnen Parallelen abgeschnittenen Bögen in die entsprechende Anzahl gleicher Theile getheilt werden. Doch wird die Vereinfachung nicht besonders gross. Diese Projektionsmethode wurde verwendet bei der amerikanischen

---

1) Ist die Länge des Äquatorgrades = 1·5 cm., so wird ϱ für den 50. Parallel $1{\cdot}5 \times 48{\cdot}077 = 72{\cdot}115$ cm. Der Halbmesser der Kugel, der aber weiter nicht benöthigt wird, ist dann 57·29577 solcher Einheiten.

Küstenvermessung (Coast survey office) und wird daher auch mitunter als *amerikanische polyconische* Projektion bezeichnet.[1])

Aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \Theta = -\frac{\vartheta - \sin \vartheta}{\sec \varphi^2 - \cos \vartheta}$$

folgt, dass Θ stets negativ ist, weil $\vartheta > \sin \vartheta$, ferner $\sec \varphi$ stets grösser als 1, und $\cos \vartheta$ stets kleiner als 1 ist. Es werden daher die Winkel, welche die Meridiane der Karte im Sinne der wachsenden Breiten mit den Parallelen im Sinne der wachsenden Längen einschliessen, also $\sphericalangle NM'z$ (Fig. 45), kleiner als 90^0 sein, da der Winkel SMM' negativ ist. Θ ist nur gleich Null für $\varphi = 0$, weil dann ϑ und $\sin \vartheta$ für jedes λ gleich Null sind, und für $\varphi = 90^0$, weil dann $\sec \varphi = \infty$ ist.

b) Man kann jedoch die Projektion auch so bestimmen, dass die Meridiane die in derselben Weise wie in *a*) gezeichneten Parallelkreise überall *rechtwinklig* schneiden; diese sogenannte **rectanguläre polyconische** Projektion wird vom topographischen Departement des englischen Kriegsministeriums verwendet.[2])

Es ist hier

$$\varrho = r \cot \varphi$$

$$s = r\,(\varphi + \cot \varphi)$$

und

$$\Theta = 0.$$

Die letztere Bedingung giebt zunächst, ohne Rücksicht auf die Werte von s und ϱ, da auch $\operatorname{tg} \Theta = 0$ sein muss:

$$\varrho \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} + \frac{ds}{d\varphi} \sin \vartheta = 0. \tag{42}$$

---

1) In dem Report of the Superintendent of the Coast survey 1859, Apendix 33, pag. 328 ff. giebt *J. E. Hilgard* Tafeln zur leichtern Construktion des Netzes, und zwar giebt

Tafel I die Längen für einen Breiten- und einen Längengrad in Metern von 0^0 bis 54^0 Breite; ferner den anzuwendenden Radius des Parallels der Abwicklung, so wie den Winkel ϑ (Fig. 45) für 10^0 Längendifferenz.

Da jedoch die Mittelpunkte der Parallelkreise für grössere Massstäbe nicht auf das Zeichenblatt fallen werden, so wird es nöthig diese durch die Coordinaten einzelner Punkte derselben zu zeichnen. Hierzu wird jeder Parallelkreis auf ein rechtwinkliges Axensystem bezogen, dessen Ursprung mit dem Schnittpunkte A des Parallels mit dem ersten Meridian und dessen Y-axe mit dem ersten Meridian selbst zusammenfällt; es ist dann

$$x = \varrho \sin \vartheta$$

$$y = \varrho - \varrho \cos \vartheta = 2\varrho \sin \tfrac{1}{2}\vartheta^2$$

und Tafel II des genannten Werkes giebt die Werte von x und y für die Breite von 1^0 bis 54^0 und für Längendifferenzen von 1^0 bis 30^0.

2) „Description of the Projection used in the Topographical Departement of the War Office for Maps embracing larges portions of the Earths surface. By Colonel *Henry James*" im Journal of the Royal Geographical Society Bd. XXX (London 1860) pag. 106.

Setzt man

$$\frac{1}{\varrho}\frac{ds}{d\varphi} = \frac{1}{L}\frac{dL}{d\varphi}, \tag{43a}$$

wobei L eine Hilfsvariable ist, die mit s und ϱ in der hier definierten Weise verbunden ist, so wird

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi} = -\frac{1}{\varrho}\frac{ds}{d\varphi} = -\frac{1}{L}\frac{dL}{d\varphi},$$

also integriert

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{\psi(\lambda)}{L}, \tag{42a}$$

wobei $\psi(\lambda)$ eine willkürliche Funktion von λ ist (da nur partiell nach φ integriert wurde). Da für $\lambda = 0$ auch $\vartheta = 0$ sein soll, so muss $\psi(\lambda)$ eine gleichzeitig mit λ verschwindende Funktion sein. Dieses ist aber die einzige bei den rechtwinkligen polyconischen Projektionen zu erfüllende Bedingung. Wählt man umgekehrt eine ganz beliebige für $\lambda = 0$ verschwindende Funktion $\psi(\lambda)$ und eine ganz beliebige Funktion L von φ, und setzt $\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{\psi(\lambda)}{L}$, so wird das Netz immer rechtwinklig sein, wenn nur

$$\varrho = L\frac{\frac{ds}{d\varphi}}{\frac{dL}{d\varphi}}, \tag{43b}$$

wobei noch s beliebig ist; oder auch

$$s = \int\frac{\varrho}{L}\frac{dL}{d\varphi}\,d\varphi, \tag{43c}$$

wobei ϱ beliebig ist. Hier wird, weil $\sec\Theta = 1$ ist:

$$\left.\begin{aligned} k_m &= -\frac{1}{r}\left(\frac{d\varrho}{d\varphi} - \frac{ds}{d\varphi}\cos\vartheta\right) \\ k_p &= \frac{\varrho\sin\vartheta}{r\cos\varphi}\,\frac{\psi'(\lambda)}{\psi(\lambda)} \end{aligned}\right\}. \tag{44}$$

Für den vorliegenden Fall ist jedoch durch die Annahme für ϱ und s bereits aus (43a) L definiert. Es ist nämlich

$$\frac{ds}{d\varphi} = r(1 - \operatorname{cosec}\varphi^2) = -r\cot\varphi^2,$$

daher

$$\frac{1}{L}\frac{dL}{d\varphi} = -\frac{\operatorname{tg}\varphi}{r}\cdot r\cot\varphi^2 = -\cot\varphi,$$

oder integriert:

$$\log L = -\log\sin\varphi;\quad L = \operatorname{cosec}\varphi,$$

also

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \psi(\lambda)\cdot\sin\varphi.$$

Der Bogen AM (Fig. 45) ist aber

$$\varrho\vartheta = 2r\cot\varphi\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\,\frac{\frac{\vartheta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}} = 2r\cos\varphi\cdot\psi(\lambda)\cdot\frac{\frac{\vartheta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}}.$$

Auf dem Äquator wird derselbe daher, weil hier $\varphi = 0$ und $\vartheta = 0$ ist:

$$(AM)_0 = 2r\psi(\lambda).$$

Stellt man nun noch die Bedingung, dass auf dem Äquator die Längen in wahrer Grösse erscheinen, so wird

$$(AM)_0 = r\lambda,$$

woraus man wegen der Identität mit der früheren Gleichung

$$\psi(\lambda) = \frac{\lambda}{2}, \quad \psi'(\lambda) = \tfrac{1}{2}$$

erhält, womit

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{\lambda}{2}\sin\varphi$$

wird. Hiermit wird nun

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = -r\operatorname{cosec}\varphi^2; \quad \frac{ds}{d\varphi} = -r\cot\varphi^2,$$

$$k_m = \operatorname{cosec}\varphi^2 - \cot\varphi^2\cos\vartheta,$$

$$k_p = \frac{\sin\vartheta}{\lambda\sin\varphi}.$$

Für die Construktion der Parallelkreise wird man genau so verfahren, wie bei der in a) angeführten Projektionsmethode. Um die Meridiane zu construieren, hat man zunächst

$$\varrho\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta = \frac{r\lambda}{2}\cos\varphi.$$

Nun ist $r\lambda\cos\varphi$ die Länge des zwischen zwei Meridianen von der Längendifferenz λ enthaltenen Bogens des Parallels auf der Erde in der Breite φ. Sei nun (Fig. 47) CA der Meridian des Kartenmittelpunktes, C der Mittelpunkt des Kartenparallels Mx von der Breite φ. Macht man auf der Tangente My des Kartenparallels MN gleich der halben Länge des zur Längendifferenz λ gehörigen Parallelbogens der Kugel, also $MN = \frac{1}{2}r\cos\varphi\cdot\lambda$, und verbindet N mit C, so ist

$$CM\operatorname{tg}MCN = MN = \tfrac{1}{2}r\lambda\cos\varphi,$$

daher muss

$$MCN = \tfrac{1}{2}\vartheta$$

sein, weil $CM = \varrho$ ist. Durchschneidet man also mit der Öffnung NM aus N als Mittelpunkt den Parallel Mx in M_1, so ist M_1 der in diesem Parallel gelegene Punkt des Meridians der Länge λ. Zur Construktion der Parallelkreise wird man daher die Hälfte des mit der angenommenen Länge a des Äquatorgrades multiplicierten, aus Tafel 13 entnommenen Bogens g_φ auf der Tangente My wiederholt

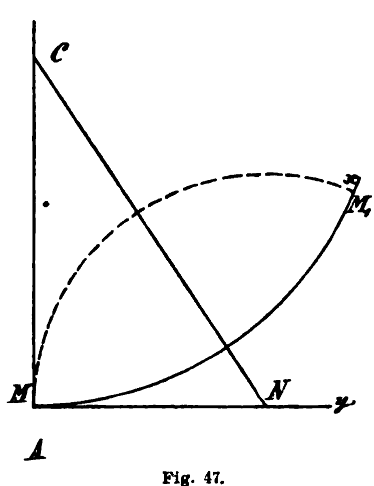


Fig. 47.

abtragen, und aus den Theilpunkten als Mittelpunkten mit den Öffnungen NM die Bögen MM_1 ziehen.[1])

c) Macht man $\Theta = 0$ und überdies $k_m = k_p$, so wird dies eine **conforme polyconische Projektion.** Für diese muss also:

$$\frac{ds}{d\varphi}\cos\vartheta - \frac{d\varrho}{d\varphi} = \frac{\varrho \sin\vartheta}{\cos\varphi}\,\frac{\psi'(\lambda)}{\psi(\lambda)}$$

sein. Um hieraus $\psi(\lambda)$ zu bestimmen, soll s eliminiert und durch L ersetzt werden.[2]) Man erhält:

$$\psi'(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)\cos\varphi}{\varrho \sin\vartheta}\left(\frac{ds}{d\varphi}\cos\vartheta - \frac{d\varrho}{d\varphi}\right)$$

$$= \frac{\psi(\lambda)\cos\varphi}{2\varrho\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\vartheta^2}{2}}}\left(\frac{ds}{d\varphi}\,\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\vartheta^2}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\vartheta^2}{2}} - \frac{d\varrho}{d\varphi}\right)$$

$$= \frac{\psi(\lambda)\cos\varphi}{2\varrho}\left(\frac{dL}{d\varphi}\,\frac{\varrho}{L}\,\frac{L^2-\psi(\lambda)^2}{L^2+\psi(\lambda)^2} - \frac{d\varrho}{d\varphi}\right)\frac{L^2+\psi(\lambda)^2}{L\psi(\lambda)}$$

$$= \frac{\cos\varphi}{2L^2}\,\frac{dL}{d\varphi}\,[L^2-\psi(\lambda)^2] - \frac{\cos\varphi}{2\varrho L}\,\frac{d\varrho}{d\varphi}\,[L^2+\psi(\lambda)^2]$$

$$= -\psi(\lambda)^2\left[\frac{\cos\varphi}{2\varrho L}\,\frac{d\varrho}{d\varphi} + \frac{\cos\varphi}{2L^2}\,\frac{dL}{d\varphi}\right] + L^2\left[\frac{\cos\varphi}{2L^2}\,\frac{dL}{d\varphi} - \frac{\cos\varphi}{2\varrho L}\,\frac{d\varrho}{d\varphi}\right]$$

$$= -\psi(\lambda)^2\,\frac{\cos\varphi}{2\varrho L^2}\left[L\frac{d\varrho}{d\varphi} + \varrho\frac{dL}{d\varphi}\right] - \frac{\cos\varphi}{2\varrho}\left[L\frac{d\varrho}{d\varphi} - \varrho\frac{dL}{d\varphi}\right]$$

$$= -\left(L\frac{d\varrho}{d\varphi} + \varrho\frac{dL}{d\varphi}\right)\frac{\cos\varphi}{2\varrho L^2}\left[\psi(\lambda)^2 + L^2\,\frac{L\frac{d\varrho}{d\varphi} - \varrho\frac{dL}{d\varphi}}{L\frac{d\varrho}{d\varphi} + \varrho\frac{dL}{d\varrho}}\right].$$

Da sowol $\psi'(\lambda)$ als auch $\psi(\lambda)$ von φ unabhängig sind, so müssen hier die beiden von φ abhängigen Ausdrücke sich auf Constante reducieren, und eine derselben kann geradezu gleich 1 gesetzt werden, weil man sonst nur L mit einer gewissen Constanten zu multiplizieren hätte, was s nicht verändern würde; ebenso würde $\psi(\lambda)$ mit derselben Zahl multipliziert erscheinen, so dass auch ϑ nicht geändert würde. Man hat daher

$$L^2\,\frac{L\frac{d\varrho}{d\varphi} - \varrho\frac{dL}{d\varphi}}{L\frac{d\varrho}{d\varphi} + \varrho\frac{dL}{d\varphi}} = 1$$

und daraus

$$L\frac{d\varrho}{d\varphi} - \varrho\frac{dL}{d\varphi} = \frac{1}{L}\,\frac{d\varrho}{d\varphi} + \frac{\varrho}{L^2}\,\frac{dL}{d\varphi}$$

$$\left(L - \frac{1}{L}\right)d\varrho = \varrho\, d\left(L - \frac{1}{L}\right),$$

also integriert

$$\log_n \varrho = \log_n\left(L - \frac{1}{L}\right) + \log_n \frac{c}{2},$$

1) Also wird man z. B. für $a = 1{\cdot}5$ cm auf der Tangente des Parallels von 40^0 Breite den Wert $\frac{1}{4} \cdot 1{\cdot}5 + 0{\cdot}76604 = 0{\cdot}57$ cm wiederholt auftragen.

2) S. *Tissot* l. c. pag. 250.

wobei für die Integrationsconstante, welche den Massstab der Karte bestimmt, $\frac{c}{2}$, geschrieben wurde; daher

$$\varrho = \frac{c}{2}\left(L - \frac{1}{L}\right)$$

und da

$$ds = \frac{\varrho}{L}\,dL,$$

so wird

$$s = \frac{c}{2}\left(L + \frac{1}{L}\right),$$

wobei die additive Constante gleich Null gesetzt werden kann, weil die Hinzufügung einer solchen nur eine Verschiebung des Anfangspunktes O der Zählung bedeuten würde. Hieraus folgt nun

$$s + \varrho = cL$$

$$s - \varrho = \frac{c}{L},$$

und durch Multiplikation:

$$s^2 - \varrho^2 = c^2.$$

Da ferner auch

$$\left(L\frac{d\varrho}{d\varphi} + \varrho\frac{dL}{d\varphi}\right)\frac{\cos\varphi}{2\varrho L^2} = -\frac{n}{2} \tag{m}$$

ist, wenn man mit $-\frac{n}{2}$ die zweite in dem Ausdrucke für $\psi'(\lambda)$ auftretende Constante bezeichnet, so wird

$$\psi'(\lambda) = +\frac{n}{2}\left[1 + \psi(\lambda)^2\right],$$

woraus durch Integration

$$\text{arc tg}\,\psi(\lambda) = \frac{n}{2}\lambda + c',$$

oder

$$\psi(\lambda) = \text{tg}\left(\frac{n}{2}\lambda + c'\right)$$

folgt. Hiermit würde

$$\text{tg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{\text{tg}\left(\frac{n}{2}\lambda + c'\right)}{L};$$

und weil für $\lambda = 0$ auch $\vartheta = 0$ wird, so muss $c' = 0$ sein, so dass

$$\psi(\lambda) = \text{tg}\frac{n}{2}\lambda$$

ist. Zur Bestimmung von L kann man die Gleichung (m) auch schreiben:

$$\frac{d(L\varrho)}{d\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{2\varrho L^2} = -\frac{n}{2},$$

oder da

$$L\varrho = \frac{c}{2}(L^2 - 1); \quad \frac{d(L\varrho)}{d\varphi} = cL\frac{dL}{d\varphi};$$

$$\frac{\cos\varphi}{L^2 - 1}\frac{dL}{d\varphi} = -\frac{n}{2}$$

$$\frac{dL}{L^2 - 1} = -\frac{n}{2}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

und integriert

$$\tfrac{1}{2}\log_n \frac{L-1}{L+1} = +\frac{n}{2}\log_n \operatorname{tg}\left(45-\frac{\varphi}{2}\right) + \log_n k,$$

wobei für die Integrationsconstante $\log_n k$ gesetzt würde, woraus

$$\frac{L-1}{L+1} = k \operatorname{tg}\left(45-\frac{\varphi}{2}\right)^n$$

$$L = \frac{1+k\operatorname{tg}\left(45-\frac{\varphi}{2}\right)^n}{1-k\operatorname{tg}\left(45-\frac{\varphi}{2}\right)^n}$$

folgt. Alles entsprechend zusammengestellt, hat man daher, unter c, k, n Constante verstanden:

$$\left.\begin{aligned}
L &= \frac{1+k\operatorname{tg}\left(45-\frac{\varphi}{2}\right)^n}{1-k\operatorname{tg}\left(45-\frac{\varphi}{2}\right)^n}; \quad \psi(\lambda) = \operatorname{tg}\frac{n}{2}\lambda \\
s &= \frac{c}{2}\left(L+\frac{1}{L}\right) = c\,\frac{1+k^2\operatorname{tg}\left(45-\frac{\varphi}{2}\right)^{2n}}{1-k^2\operatorname{tg}\left(45-\frac{\varphi}{2}\right)^{2n}} \\
\varrho &= \frac{c}{2}\left(L-\frac{1}{L}\right) = c\,\frac{2k\operatorname{tg}\left(45-\frac{\varphi}{2}\right)^n}{1-k^2\operatorname{tg}\left(45-\frac{\varphi}{2}\right)^{2n}} \\
\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} &= \frac{\psi(\lambda)}{L} = \frac{1-k\operatorname{tg}\left(45-\frac{\varphi}{2}\right)^n}{1+k\operatorname{tg}\left(45-\frac{\varphi}{2}\right)^n}\operatorname{tg}\frac{n}{2}\lambda
\end{aligned}\right\}. \tag{45}$$

Die Grösse s giebt die Entfernung des Mittelpunktes des Parallelkreises der Breite φ vom Durchschnittspunkt des Äquators mit dem ersten Meridian, ϱ ist der Halbmesser des Parallels, welcher demnach durch diese beiden Grössen bestimmt ist. Um die Meridiane zu zeichnen, müsste man in jedem Parallelkreis, dessen Breite φ, den Punkt, welcher dem Meridiane von der Länge λ angehört, durch ϑ (den Winkel am Mittelpunkte des Parallelkreises) bestimmen; dies wird jedoch unnöthig, wenn man die Gleichung des Meridians bestimmt. Es ist nämlich (Fig. 45):

$$x = MP = \varrho \sin\vartheta$$

$$y = OP = OS - SP = s - \varrho\cos\vartheta.$$

Nun war

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{\psi(\lambda)}{L},$$

daher ist

$$L = \psi(\lambda)\cot\frac{\vartheta}{2} = \operatorname{tg}\frac{n}{2}\lambda\cot\frac{\vartheta}{2},$$

folglich

$$\varrho = \frac{c}{2}\left(L-\frac{1}{L}\right) = \frac{c}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{n}{2}\lambda\cot\frac{\vartheta}{2} - \cot\frac{n}{2}\lambda\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right),$$

oder

$$\varrho = 2c \frac{\left(\sin\frac{n}{2}\lambda\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^2 - \left(\cos\frac{n}{2}\lambda\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^2}{\sin n\lambda \sin\vartheta}$$

und ebenso

$$s = 2c \frac{\left(\sin\frac{n}{2}\lambda\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^2 + \left(\cos\frac{n}{2}\lambda\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^2}{\sin n\lambda \sin\vartheta}.$$

Zerlegt man im Zähler von ϱ die Differenz der Quadrate in das Produkt aus der Summe und Differenz der ersten Potenzen, so kann man auch schreiben:

$$\varrho = 2c \frac{\sin\frac{1}{2}(n\lambda - \vartheta)\sin\frac{1}{2}(n\lambda + \vartheta)}{\sin n\lambda \sin\vartheta}$$

$$= c\frac{\cos\vartheta - \cos n\lambda}{\sin n\lambda\sin\vartheta}.$$

Nun wird

$$s - \varrho\cos\vartheta = \frac{2c}{\sin n\lambda\sin\vartheta}\left\{\left(\sin\frac{n\lambda}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^2\cdot 2\sin\frac{\vartheta}{2}^2 + \left(\cos\frac{n}{2}\lambda\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^2\cdot 2\cos\frac{\vartheta}{2}^2\right\}$$

$$= \frac{c\sin\vartheta}{\sin n\lambda} = y$$

und

$$\varrho\sin\vartheta = c\frac{\cos\vartheta - \cos n\lambda}{\sin n\lambda} = x,$$

folglich

$$\frac{c\sin\vartheta}{\sin n\lambda} = y$$

$$\frac{c\cos\vartheta}{\sin n\lambda} = x + c\cot n\lambda$$

$$y^2 + (x + c\cot n\lambda)^2 = c^2\operatorname{cosec} n\lambda^2, \tag{46}$$

welche Gleichung von ϑ unabhängig ist und nur λ enthält, demnach die Gleichung der Meridiane vorstellt. Diese sind also Kreise, deren Mittelpunkte auf der X-axe (dem Bilde des Äquators) in der Entfernung $-c\cot n\lambda$ liegen, und deren Halbmesser $c\operatorname{cosec} n\lambda$ ist.

Da für $x = 0$ $y = \pm c$ wird, so gehen sämmtliche Meridiane durch die beiden Punkte, welche um $\pm c$ von O entfernt sind, $2c$ bedeutet demnach den Abstand der Pole.

Zur bequemeren Construktion sei

$$k\operatorname{tg}\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)^n = \operatorname{tg}\frac{\psi}{2},$$

dann wird:

$$s = c\sec\psi;\quad \varrho = c\operatorname{tg}\psi.$$

Setzt man $k = \frac{1}{\alpha}$; $n = 2m$ und führt den Abstand s' des Punktes S vom Pole, also $s' = s - c$ ein, ersetzt überdies $\operatorname{tg}\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)$ durch $\cot\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right)$, so erhält man ohne Mühe:

$$s = c\,\frac{\alpha^2 \operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right)^{4m} + 1}{\alpha^2 \operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right)^{4m} - 1}$$

$$s' = \frac{2c}{\alpha^2 \operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right)^{4m} - 1}$$

$$\varrho = \frac{2c\alpha \operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right)^{2m}}{\alpha^2 \operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right)^{4m} - 1}$$

Die Vergleichung dieser Werte und der Gleichung (46) für die Meridiane mit den für die *Lagrange*'schen Projektionen (s. § 51) erhaltenen Resultaten, zeigt die Identität der beiden Projektionsmethoden.

Ein spezieller Fall dieser Projektion für $k = 1$, $n = 1$, wo also

$$\psi = 90 - \varphi$$

ist, also

$$s = c \operatorname{cosec} \varphi, \quad \varrho = c \cot \varphi,$$

und die Gleichung der Meridiane

$$y^2 + (x + c \cot \lambda)^2 = c^2 \cdot \operatorname{cosec} \lambda^2$$

wird, ist die stereographische Äquatorealprojektion (§ 12).

d) **Äquivalente polyconische** Projektion. Für die Flächenvergrösserung hatten wir den Wert gefunden

$$K = -\frac{\varrho}{r^2 \cos \varphi}\left(\frac{d\varrho}{d\varphi} - \frac{ds}{d\varphi} \cos \vartheta\right)\frac{\partial \vartheta}{\partial \lambda}.$$

Ist nun die Flächenvergrösserung in jedem Punkte der Karte gleich 1, so werden die unendlich kleinen Flächentheile, daher auch ganz beliebige Flächenstücke der Karte dem Originale flächengleich sein, in welchem Falle die Projektion eine äquivalente heisst. Hiefür muss also sein:

$$-\frac{\varrho}{r^2 \cos \varphi}\cdot\left(\frac{d\varrho}{d\varphi} - \frac{ds}{d\varphi} \cos \vartheta\right)\frac{\partial \vartheta}{\partial \lambda} = 1.$$

Integriert man nach λ (wobei φ als constant anzusehen ist), so wird

$$\left(\frac{ds}{d\varphi} \sin \vartheta - \frac{d\varrho}{d\varphi}\vartheta\right)\frac{\varrho}{r^2 \cos \varphi} = \lambda + \psi(\varphi), \tag{47}$$

wobei $\psi(\varphi)$ eine willkürliche Funktion der Breite φ ist. Hierbei sind s und ϱ ganz beliebige Funktionen von φ. Sei s constant, d. h. die sämmtlichen Parallelkreise der Karte concentrische Kreise, daher $\frac{ds}{d\varphi} = 0$; ferner die einzelnen Parallelkreise äquidistant, und ihre Entfernung gleich derjenigen auf der Kugel, also

$$\varrho = C - r\varphi;$$

demnach

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = -r,$$

so ist:

$$\frac{\varrho\vartheta}{r\cos\varphi} = \lambda + \psi(\varphi),$$

und da für $\lambda = 0$ auch ϑ für jedes φ gleich Null sein soll, $\psi(\varphi) = 0$, und

$$\varrho\vartheta = \lambda r \cos\varphi.$$

Es ist aber $\varrho\vartheta$ der Bogen des Parallels der Karte von der Breite φ zwischen zwei Punkten, deren Längendifferenz λ, für welche der Bogen des Parallels der Kugel $\lambda r \cos\varphi$ ist; Die letzte Gleichung sagt daher, dass die Parallelkreise der Karte in wahrer Grösse abgebildet werden. Diese Projektion ist die später zu behandelnde *Mercator*'sche äquivalente[1]) (s. § 41).

e) Die Meridiane sollen bestimmte Curven sein.

Aus der Gleichung $f(x, y) = 0$ der Curve folgt ein Wert

$$\frac{dy}{dx} = \psi(x, y).$$

Nun ist $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} M'Mm$, wenn m in der Verlängerung von PM (Fig. 45) über M hinaus liegt, also:

$$\operatorname{tg} M'Mm = \psi(x, y).$$

Drückt man nun $\operatorname{tg} M'Mm$, und die Coordinaten x, y durch ϱ, s, ϑ aus, so erhält man eine Differentialgleichung zwischen diesen drei Grössen, und man kann für zwei derselben willkürliche Funktionen annehmen, wodurch die dritte bestimmt ist. Man hat aber

$$\begin{aligned} M'Mm &= SMm + M'MS = 90 + PSM + M'MS \\ &= 90 + \vartheta + \Theta, \end{aligned}$$

daher:

$$\operatorname{tg} M'Mm = -\cot(\vartheta + \Theta) = -\frac{1 - \operatorname{tg}\vartheta \operatorname{tg}\Theta}{\operatorname{tg}\Theta + \operatorname{tg}\vartheta},$$

wobei

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{\varrho\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi} + \frac{ds}{d\varphi}\sin\vartheta}{\frac{d\varrho}{d\varphi} - \frac{ds}{d\varphi}\cos\vartheta}.$$

Setzt man diesen Wert oben ein, so folgt[2])

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{ds}{d\varphi} + \varrho\sin\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi} - \cos\vartheta\frac{d\varrho}{d\varphi}}{\varrho\cos\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi} + \sin\vartheta\frac{d\varrho}{d\varphi}}.$$

---

1) Gewöhnlich fälschlich *Bonne*'sche Projektion genannt.

2) Man kann diese Formel auch auf andere Weise ableiten. Es war gefunden

$$x = \varrho\sin\vartheta$$
$$y = s - \varrho\cos\vartheta.$$

Für einen Meridian ist nun λ constant, also $\frac{\partial\vartheta}{\partial\lambda} = 0$, und es wird:

$$\frac{dx}{d\varphi} = \varrho\cos\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi} + \sin\vartheta\frac{d\varrho}{d\varphi}.$$

Folgt nun aus der Gleichung der Curve

$$\frac{dy}{dx} = \psi(x, y) = \psi(\varrho \sin \vartheta, s - \varrho \cos \vartheta),$$

so hat man zwischen den drei Grössen ϱ, s, ϑ die Gleichung

$$\frac{\frac{ds}{d\varphi} + \varrho \sin \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} - \cos \vartheta \frac{d\varrho}{d\varphi}}{\varrho \cos \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} + \sin \vartheta \frac{d\varrho}{d\varphi}} = \psi(\varrho \sin \vartheta, s - \varrho \cos \vartheta). \quad (48)$$

Als Beispiel soll die von *P. Fournier* im Jahre 1646 vorgeschlagene polyconische Projektion gewählt werden.[1]) Bei derselben ist der Äquator durch die Meridiane, welche Ellipsen sind, und sowol der erste als auch der 90. Meridian durch die Parallelkreise in gleiche Theile getheilt.

Die Gleichung der Meridiane ist

$$\frac{x^2}{f(\lambda)^2} + \frac{y^2}{f_1(\lambda)^2} = 1.$$

Da sämmtliche Meridiane durch die beiden Pole gehen, welche in der Y-axe liegen, so ist die Entfernung derselben die in der Richtung der y liegende Axe der Ellipsen, also $f_1(\lambda)$ eine Constante $= c$ gleich der halben Entfernung der beiden Pole. Der Annahme nach ist aber diese Entfernung gleich der Länge des Meridians also gleich $r\pi$, daher

$$f_1(\lambda) = r\pi.$$

Für $y = 0$ muss ferner $x = r\lambda$ sein, es wird daher

$$f(\lambda) = r\lambda$$

demzufolge

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\pi^2} = r^2,$$

woraus

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\pi^2}{\lambda^2}\frac{x}{y} = -\frac{\pi^2}{\lambda^2}\frac{\varrho \sin \vartheta}{s - \varrho \cos \vartheta}$$

folgt. Die Bedingung, dass die Abstände der Parallelen im ersten Meridian gleich seien jenen auf der Kugel, giebt

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{ds}{d\varphi} + \varrho \sin \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} - \cos \vartheta \frac{d\varrho}{d\varphi},$$

folglich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{ds}{d\varphi} + \varrho \sin \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} - \cos \vartheta \frac{d\varrho}{d\varphi}}{\varrho \cos \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} + \sin \vartheta \frac{d\varrho}{d\varphi}}.$$

Setzt man diesen Wert gleich

$$-\frac{1 - \operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} \Theta}{\operatorname{tg} \Theta + \operatorname{tg} \vartheta}$$

und sucht daraus $\operatorname{tg} \Theta$, so erhält man

$$\operatorname{tg} \Theta \left[\frac{ds}{d\varphi} - (\cos \vartheta + \sin \vartheta \operatorname{tg} \vartheta) \frac{d\varrho}{d\varphi}\right] = -\left[\operatorname{tg} \vartheta \frac{ds}{d\varphi} + \varrho(\sin \vartheta \operatorname{tg} \vartheta + \cos \vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi}\right]$$

woraus der pag. 134 gefundene Wert von $\operatorname{tg} \Theta$ folgt.

1) S. *Tissot* pag. 257.

$$s = \varrho + r\varphi; \quad \frac{ds}{d\varphi} = \frac{d\varrho}{d\varphi} + r$$

folglich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d\varrho}{d\varphi}(1 - \cos\vartheta) + r + \varrho \sin\vartheta \frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}}{\varrho\cos\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi} + \sin\vartheta\frac{d\varrho}{d\varphi}} = -\frac{\pi^2}{\lambda^2}\frac{\varrho\sin\vartheta}{\varrho(1-\cos\vartheta) + r\varphi} \quad \text{(m)}$$

Nicolosi nahm 1660 statt der elliptischen Meridiane kreisförmige, welche durch die beiden Pole und die äquidistanten Theilpunkte des Äquators gehen; die Parallelkreise sind in derselben Weise wie oben construiert. Diese Projektion, welche sich durch die einfache Construktion der Netzlinien besonders empfiehlt, fand in Frankreich bald Eingang, wurde 1794 von dem Engländer *Aaron Arrowsmith* als neue Projektion mit dem Namen *Globularprojektion* bezeichnet. Man findet sie auch als *Arrowsmith*'sche Projektion angeführt (s. hierüber *Gretschel* l. c. p. 253); *Francoeur* nennt sie in seinem Traité de Géodésie (p. 296) *englische* Projektion.

Für die Zeichnung braucht man nun allerdings die Abhängigkeit von ϱ und ϑ von φ gar nicht zu kennen; der 90. Meridian ist ein Kreis, den man zuerst verzeichnen kann. Die durch die entsprechenden Theilpunkte des ersten und 90. Meridians gezogenen Kreise sind die Bilder der Parallelkreise. Für die *Globularprojektion* erhält man die Meridiane, indem man durch die beiden Pole P und P_1 und die Theilpunkte des Äquators Kreise verzeichnet; für die *Fournier*'sche Projektion, indem man Ellipsen verzeichnet, für welche PP_1 die eine Halbaxe ist und die Theilpunkte des Äquators die Endpunkte der anderen Halbaxe. In Fig. 48 ist die eine Hälfte (rechts) nach der Globular- die zweite (links) nach Fourniers Projektion dargestellt. Es liesse sich nun aus der Figur ϱ durch φ ausdrücken, wodurch man auch zu dem Werte von $\frac{d\varrho}{d\varphi}$ gelangt, womit die Gleichung (m) eine Differentialgleichung in ϑ wird, aus welcher sich $\vartheta = F(\varphi)$ ergiebt, wo aber F auch λ enthält, weil es bereits in der Gleichung (m) enthalten ist. Damit erhielte man dann auch $\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}$, $\frac{\partial\vartheta}{\partial\lambda}$, welche zur Ermittelung von k_m, k_p dienen. Da jedoch diese Ausdrücke weiter kein Interesse bieten, sollen diese Ableitungen hier übergangen werden.

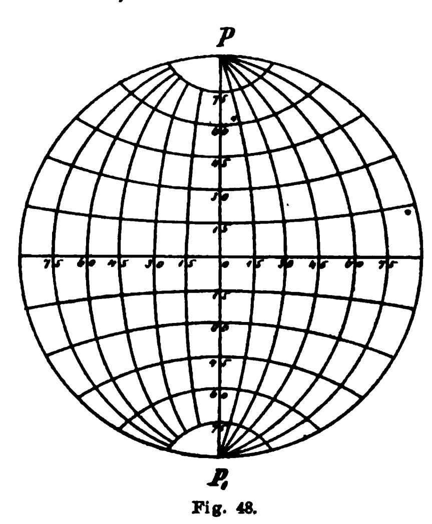


Fig. 48.

III. KAPITEL.

ÄQUIVALENTE ABBILDUNGEN.

---

31. Die in diesem Kapitel zu behandelnden Projektionen sind ohne Rücksicht auf perspektivische Darstellung oder Kegelabwicklung einfach durch Festsetzung eines sonst beliebigen Gesetzes, in der Art, dass man durch Erfüllung einer Reihe von Bedingungen eine gute Karte bekömmt, erhalten.

Als erste der stets zu erfüllenden Bedingungen ist in diesem Kapitel diejenige gewählt, dass die Flächentheile der Karte proportional sein. sollen denjenigen auf der Erdoberfläche, d. h. dass zwei an verschiedenen Punkten der Karte gelegene Flächenelemente dasselbe Verhältnis zu einander haben, wie die entsprechenden Elemente der Erdoberfläche. Denkt man sich, wie dies schon bei den perspektivischen Projektionen geschah, von der Erdoberfläche ein vollständig ähnliches, verkleinertes Abbild genommen, wobei man den Massstab der Verkleinerung ganz beliebig wählen kann, so kann man die Karte mit diesem verkleinerten Abbild vergleichen, und wenn man den Massstab der entsprechend verkleinert dargestellten Erdoberfläche passend wählt, so kann man die Karte so herstellen, dass direkt die endlichen (oder unendlich kleinen) Flächentheile derselben denjenigen auf dem Globus *gleich* seien; eine solche Darstellung nennt man eine *äquivalente*.

Denken wir uns jedem Punkte der Kugel einen Punkt der Ebene zugeordnet, und bestimmen wir die Punkte auf der Kugel durch ihre sphärischen Coordinaten: geographische Länge und Breite; die Punkte der Ebene beziehen wir auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, und es wird der Punkt, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y sind, als das Bild des Punktes aufzufassen sein, dessen geographische Breite und Länge φ, λ sind. Es werden also x, y allgemein als Funktionen von φ, λ angesehen werden müssen; ändern sich φ, λ, so werden sich auch x, y ändern und es wird

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi$$

Geht man von einem Punkte der Erdoberfläche zu einem anderen über, der dieselbe Breite hat, so wird $d\varphi = 0$, und die hierzu gehörigen Werte von dx, dy geben die Änderung der rechtwinkligen Coordinaten für das Fortschreiten in der Richtung der Parallelkreise. Ebenso sind dx, dy unter der Voraussetzung, dass $d\lambda = 0$ ist, die Coordinatenänderungen für ein Fortschreiten in der Richtung der Meridiane. Nehmen wir nun auf der Erdoberfläche drei Punkte an, deren Coordinaten

$$\begin{matrix} \varphi & \varphi & \varphi + d\varphi \\ \lambda & \lambda + d\lambda & \lambda \end{matrix}$$

sind, so sind die entsprechenden der Karte

$$\begin{matrix} x & x + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda & x + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi \\ y & y + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda & y + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi . \end{matrix}$$

Um jetzt die Bedingung der Äquivalenz auszudrücken, ist es nötig die Fläche der von den drei Punkten auf der Erdoberfläche und auf der Karte gebildeten Elemente zu bestimmen, wobei wir erstere hier allgemeiner als abgeplattetes Rotationssphäroid voraussetzen. Der Halbmesser des Parallelkreises von der Breite φ ist dann die parallel zur grossen Axe der Meridianellipse gemessene Abscisse des Punktes, dessen geographische Breite φ ist; also, wenn A die Länge der grossen Halbaxe, ε die Excentricität bedeutet:

$$r_p = \frac{A \cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2}}$$

und das Bogenelement des Parallelkreises

$$ds_p = \frac{A \cos \varphi \, d\lambda}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2}} .$$

Der Krümmungshalbmesser der Meridianellipse in dem betrachteten Punkte ist[1])

$$r_m = \frac{A (1 - \varepsilon^2)}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2)^3}}$$

und das Bogenelement des Meridians

$$ds_m = \frac{A (1 - \varepsilon^2) \, d\varphi}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2)^3}} .$$

Das Flächenelement des Dreiecks wird daher

$$\frac{\frac{1}{2} A^2 (1 - \varepsilon^2) \cos \varphi \, d\varphi d\lambda}{(1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2)^2} .$$

In der Ebene sind die drei zugeordneten Punkte

$$\begin{matrix} x & x + dx_1 & x + dx_2 \\ y & y + dy_1 & y + dy_2 , \end{matrix}$$

---

1) S. hierüber z. B. *Helmert* die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, I. Bd. pag. 44.

wobei, wie schon erwähnt, da für den zweiten Punkt nur λ, für den dritten nur φ veränderlich ist, weil der zweite dem ersten unendlich benachbart im Parallelkreise, der dritte im Meridiane liegt:

$$dx_1 = \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda \qquad dx_2 = \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$dy_1 = \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda \qquad dy_2 = \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi$$

ist. Die von den drei Punkten eingeschlossene Fläche ist

$$\tfrac{1}{2}(dx_1\, dy_2 - dy_1\, dx_2)$$

also

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right) d\lambda\, d\varphi.$$

Als Bedingung der Äquivalenz folgt demnach:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2}. \tag{49}$$

Selbstverständlich kann eine der beiden Funktionen x oder y willkürlich gewählt werden, und darnach wird sich dann die andere bestimmen. Setzt man voraus, dass x eine bekannte Funktion ist, d. h. nimmt man für x eine bestimmte, aber sonst ganz beliebige Funktion an, so dass

$$x = F(\lambda, \varphi),$$

so sind auch die Differentialquotienten

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = p; \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = q$$

bekannt, und man hat dann die partielle Differentialgleichung

$$p\frac{\partial y}{\partial \varphi} - q\frac{\partial y}{\partial \lambda} = \frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2}$$

in y, deren Integration zurückgeführt wird auf die Integration der totalen Differentialgleichungen

$$\frac{d\varphi}{p} = -\frac{d\lambda}{q} = \frac{dy}{\dfrac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2}}.$$

Ganz ähnlich verhält es sich, wenn y als bekannte Funktion angenommen wird.

32. Um über die Vergrösserung und Winkeländerung zu urtheilen, betrachten wir das unendlich kleine Elementardreieck, dessen Seiten auf der Erdoberfläche ds_m, ds_p, ds sind, wo die Bogenelemente ds_m, ds_p in der Richtung des Meridians und des Parallelkreises gedacht sind, also aufeinander senkrecht stehen; ds ist dann die Hypotenuse dieses rechtwinkligen Dreieckes. Da bei dem Fortschreiten im Meridiane nur φ sich ändert, so werden die Coordinaten x, y sich um dx_2, dy_2 ändern, und das entsprechende Linienelement der Karte ist

$$dS_m = \sqrt{dx_2^2 + dy_2^2} = d\varphi\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2}$$

In ähnlicher Weise ist das dem Bogenelemente ds_p des Parallelkreises entsprechende der Karte, weil für dieses nur λ sich ändert:

$$dS_p = \sqrt{dx_1^2 + dy_1^2} = d\lambda \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}.$$

Allein im allgemeinen werden die Bilder der Meridian- und Parallelkreise in der Karte nicht mehr aufeinander senkrecht stehen; ist der Winkel, welchen dieselben in einem Punkte einschliessen Θ, u. z. so gezählt, wie ihn die Meridiane im Sinne der wachsenden Breiten, die Parallelkreise im Sinne der wachsenden Längen einschliessen, und ω, ω' die Winkel der Richtungen ds, dS mit den Meridianen, ebenfalls von der Richtung der wachsenden Breiten gegen diejenige der wachsenden Längen zu gezählt, so ist

$$ds^2 = ds_m^2 + ds_p^2$$

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{ds_p}{ds_m}.$$

$$dS^2 = dS_m^2 + dS_p^2 + 2\, dS_m dS_p \cos \Theta$$

$$\operatorname{tg} \omega' = \frac{dS_p \sin \Theta}{dS_m + dS_p \cos \Theta}.$$

Die Fläche des unendlich kleinen Rechteckes $ds_m ds_p$ auf der Erdoberfläche entspricht der Fläche des Parallelogrammes $dS_m\, dS_p \sin \Theta$ auf der Karte, und wegen der Grundeigenschaft der Äquivalenz folgt

$$ds_m\, ds_p = dS_m\, dS_p \sin \Theta,$$

woraus der Winkel Θ als Function des Ortes bestimmt ist.

Sei:

$$\frac{dS_m}{ds_m} = k_m; \quad \frac{dS_p}{ds_p} = k_p; \quad \frac{dS}{ds} = k$$

so folgt, mit Rücksicht auf die bereits angeschriebenen Werte von ds_m, ds_p, dS_m, dS_p:[1])

$$\left.\begin{aligned} k_m &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt{(1-\varepsilon^2 \sin \varphi^2)^3}}{A(1-\varepsilon^2)} \\ k_p &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin \varphi^2}}{A \cos \varphi} \\ \sin \Theta &= \frac{1}{k_m k_p} \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

$$k^2 = \frac{\left(\frac{dS_m}{ds_m}\right)^2 + \left(\frac{dS_p}{ds_p}\right)^2 \left(\frac{ds_p}{ds_m}\right)^2 + 2\left(\frac{dS_m}{ds_m}\right)\left(\frac{dS_p}{ds_p}\right)\left(\frac{ds_p}{ds_m}\right)\cos \Theta}{1 + \left(\frac{ds_p}{ds_m}\right)^2}$$

$$\operatorname{tg} \omega' = \frac{\left(\frac{dS_p}{ds_p}\right) \cdot \left(\frac{ds_p}{ds_m}\right) \sin \Theta}{\left(\frac{dS_m}{ds_m}\right) + \left(\frac{dS_p}{ds_p}\right)\left(\frac{ds_p}{ds_m}\right) \cos \Theta}$$

---

1) Im Werte für k^2 und $\operatorname{tg} \omega'$ wird Zähler und Nenner durch ds^2_m resp. ds_m dividiert.

$$k^2 = \frac{k_m^2 + k_p^2 \operatorname{tg} \omega^2 + 2 k_m k_p \operatorname{tg} \omega \cos \Theta}{1 + \operatorname{tg} \omega^2}; \quad \operatorname{tg} \omega' = \frac{k_p \operatorname{tg} \omega \sin \Theta}{k_m + k_p \operatorname{tg} \omega \cos \Theta},$$

oder endlich, indem in $\operatorname{tg} \omega'$ für $\sin \Theta$ sein Wert gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} k^2 &= k_m^2 \cos \omega^2 + k_p^2 \sin \omega^2 + 2 k_m k_p \sin \omega \cos \omega \cos \Theta \\ \operatorname{tg} \omega' &= \frac{\operatorname{tg} \omega}{k_m^2 + k_m k_p \cos \Theta} = \frac{\operatorname{tg} \omega}{k_m^2 + \cot \Theta} \end{aligned}\right\}. \tag{51}$$

Wenn Θ gleich 90° werden sollte (wie dies z. B. bei den äquivalenten Kegelprojektionen der Fall ist), so wird $\cos \Theta = 0$, und dann wird auch

$$k^2 = k_m^2 \cos \omega^2 + k_p^2 \sin \omega^2$$

$$\operatorname{tg} \omega' = \frac{k_p}{k_m} \operatorname{tg} \omega = k_p^2 \operatorname{tg} \omega = \frac{1}{k_m^2} \operatorname{tg} \omega,$$

aus welch letzterer Gleichung wieder für die Maximaländerung $\delta = 2(\omega' - \omega)$ folgt:[2])

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{k_m - k_p}{k_m + k_p} = \frac{k_m^2 - 1}{k_m^2 + 1} = \frac{1 - k_p^2}{1 + k_p^2}.$$

33. *A*) Es sei x eine blosse Funktion von λ, also

$$x = F(\lambda).$$

Für die Meridiane ist λ constant, also auch x constant, die Bilder der Meridiane sind folglich in diesem Falle Gerade, die zur Y-axe in der Entfernung $x = F(\lambda)$ parallel gezogen werden. Man hat hier

$$p = F'(\lambda); \; q = 0$$

und es wird

$$dy = \frac{A^2 (1 - \varepsilon^2) \cos \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2)^2} \frac{d\varphi}{F'(\lambda)}$$

und integriert

$$y = \frac{A^2 (1 - \varepsilon^2)}{F'(\lambda)} \int \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2)^2} + \psi(\lambda),$$

oder die Integration ausgeführt:[2])

$$y = \frac{A^2 (1 - \varepsilon^2)}{F'(\lambda)} \left[\frac{\sin \varphi}{2 (1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2)} + \frac{1}{4\varepsilon} \log \frac{1 + \varepsilon \sin \varphi}{1 - \varepsilon \sin \varphi}\right] + \psi(\lambda),$$

wobei $\psi(\lambda)$ eine willkürliche Funktion ist, deren Bedeutung sich sehr leicht ermitteln lässt; da nämlich für $\varphi = 0$ die obige Gleichung

1) Für den allgemeinen Fall muss hier auf das nächste Capitel (§ 43) verwiesen werden.

2) Im folgenden treten wiederholt die beiden folgenden Integrale auf:

$$\mathrm{I} = \int \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2)^2} \quad \text{und} \quad \mathrm{II} = \int \frac{d\varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzt man in I: $\sin \varphi = z$, so wird

$$\mathrm{I} = \int \frac{dz}{(1 - \varepsilon^2 z^2)^2} = \frac{z}{2 (1 - \varepsilon^2 z^2)} + \frac{1}{4\varepsilon} \log_n \frac{1 + \varepsilon z}{1 - \varepsilon z},$$

also

$$\int \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2)^2} = \frac{\sin \varphi}{2 (1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2)} + \frac{1}{4\varepsilon} \log_n \frac{1 + \varepsilon \sin \varphi}{1 - \varepsilon \sin \varphi}.$$

sich auf $y = \psi(\lambda)$ reduciert, so folgt daraus, dass dies die Gleichung des Äquators ist (denn für diesen ist $\varphi = 0$). Soll der Äquator durch eine Gerade dargestellt werden, und nimmt man diese als X-axe, so muss für $\varphi = 0$ auch $y = 0$ sein, daher $\psi(\lambda) = 0$; dann werden die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= F(\lambda) \\ y &= \frac{A^2(1-\varepsilon^2)}{F'(\lambda)}\left[\frac{\sin\varphi}{2(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)} + \frac{1}{4\varepsilon}\log_n\frac{1+\varepsilon\sin\varphi}{1-\varepsilon\sin\varphi}\right]\end{aligned}\right\}. \tag{52}$$

Sei z. B. $F(\lambda) = A\lambda$, $F'(\lambda) = A$, so werden die Gleichungen

$$x = A\lambda$$
$$y = A(1-\varepsilon^2)\left[\frac{\sin\varphi}{2(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)} + \frac{1}{4\varepsilon}\log_n\frac{1+\varepsilon\sin\varphi}{1-\varepsilon\sin\varphi}\right].$$

Für die Kugel ist $\varepsilon = 0$ und die Gleichungen werden

$$x = A\lambda$$
$$y = A\sin\varphi,$$

welches die Gleichungen der § 25 c behandelten *Lambert*'schen äquivalenten Cylinderprojektion ist. Da hier

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = 0,\quad \frac{\partial x}{\partial\lambda} = A$$
$$\frac{\partial y}{\partial\varphi} = \frac{A(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2};\quad \frac{\partial y}{\partial\lambda} = 0$$

Da ferner

$$\varepsilon^2\frac{d}{d\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}} = \varepsilon^2\left[\frac{\varepsilon^2\sin\varphi^2\cos\varphi^2}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\cos\varphi^2-\sin\varphi^2}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^{\frac{1}{2}}}\right],$$

oder auf gleiche Nenner gebracht und reduciert:

$$\varepsilon^2\frac{d}{d\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}} = \frac{\varepsilon^2 - 2\varepsilon^2\sin\varphi^2 + \varepsilon^4\sin\varphi^4}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{1-2\varepsilon^2\sin\varphi^2+\varepsilon^4\sin\varphi^4-(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2} - \frac{1-\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

so ist

$$(1-\varepsilon^2)\int\frac{d\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}} = \int\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}\,d\varphi - \frac{\varepsilon^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}}.$$

Entwickelt man die beiden Integrale in Reihen und bleibt bei der vierten Potenz der Excentricität stehen, so folgt

$$\int\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2} = \tfrac{1}{2}\sin\varphi\,(1+\varepsilon^2\sin\varphi^2+\varepsilon^4\sin\varphi^4) + \tfrac{1}{2}\sin\varphi\,(1+\tfrac{1}{3}\varepsilon^2\sin\varphi^2 + \tfrac{1}{5}\varepsilon^4\sin\varphi^4)$$
$$= \sin\varphi\,[1+\tfrac{2}{3}\varepsilon^2\sin\varphi^2+\tfrac{3}{5}\varepsilon^4\sin\varphi^4]$$

$$(1-\varepsilon^2)\int\frac{d\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}} = \varphi\,[1-\tfrac{1}{4}\varepsilon^2-\tfrac{3}{64}\varepsilon^4] - \tfrac{3}{4}\varepsilon^2(1-\tfrac{1}{16}\varepsilon^2)\sin\varphi\cos\varphi$$
$$-\tfrac{15}{32}\varepsilon^4\sin\varphi^3\cos\varphi.$$

Letztere Reihe erhält man übrigens am einfachsten, wenn man den Ausdruck unter dem Integral in eine Reihe entwickelt und dann integriert.

ist, so wird

$$k_m = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}}; \quad k_p = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}}{\cos\varphi}. \tag{52a}$$

folglich

$$\sin\Theta = 1,$$

so dass also die Meridiane und Parallelkreise aufeinander senkrecht stehen, wie auch a priori ersichtlich ist; hieraus folgt endlich:

$$\operatorname{tg}\omega' = \frac{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}{\cos\varphi^2}\operatorname{tg}\omega$$

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{(1-\varepsilon^2)\sin\varphi^2}{2-(1+\varepsilon^2)\sin\varphi^2}.$$

34. *B*) Es sei

$$x = f(\varphi)\cdot\lambda,$$

also

$$p = f(\varphi); \quad q = f'(\varphi)\cdot\lambda,$$

daher die Differentialgleichungen

$$\frac{d\varphi}{f(\varphi)} = -\frac{d\lambda}{\lambda f'(\varphi)} = \frac{dy}{\frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2}},$$

oder

$$dy - \frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2}\cdot\frac{d\varphi}{f(\varphi)} = 0$$

$$\frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{f'(\varphi)}{f(\varphi)}\,d\varphi = 0.$$

Die Integrale dieser beiden Gleichungen sind

$$y - A^2(1-\varepsilon^2)\int\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2 f(\varphi)} = c_1$$

$$\log_n\lambda + \log_n f(\varphi) = \log_n c_2,$$

oder

$$\lambda f(\varphi) = c_2;$$

daher das allgemeine Integral der obigen beiden partiellen Differentialgleichungen

$$c_1 = \psi(c_2)$$

$$y - A^2(1-\varepsilon^2)\int\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2 f(\varphi)} = \psi[\lambda f(\varphi)] = \psi(x).$$

Wählt man z. B.

$$x = r_p\lambda = \frac{A\lambda\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}},$$

so werden die Masse längs der Parallelkreise gleich sein jenen auf der Erdoberfläche, wobei allerdings die Meridiane keine geraden Linien sein werden, denn wenn λ constant ist, so wird das zugehörige x noch von φ abhängig. Hier ist

$$f(\varphi) = \frac{A\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}}; \quad f'(\varphi) = -\frac{A(1-\varepsilon^2)\sin\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}},$$

demzufolge

$$y = A(1-\varepsilon^2)\int\frac{d\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}} + \psi(x),$$

oder

$$y = A\int\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}\,d\varphi - A\varepsilon^2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}} + \psi(x),$$

oder in Reihenform, bis inclusive Gliedern zweiter Ordnung der Excentricität:

$$y = A\varphi(1-\tfrac{1}{4}\varepsilon^2) - \tfrac{3}{4}A\varepsilon^2\sin\varphi\cos\varphi + \psi(x)$$

und für die Kugel, da für diese $\varepsilon = 0$ ist:

$$y = A\varphi;\quad x = A\cos\varphi\cdot\lambda.$$

Die Funktion $\psi(x)$ bestimmt sich wieder, indem man $\varphi = 0$ setzt, denn dann wird $y = \psi(x)$, welches demnach die Gleichung des Äquators ist. Soll dieser eine Gerade (die X-axe) sein, so muss $\psi(x) = 0$ sein, und dann wird

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{A\lambda\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}};\quad y = A\int\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}\,d\varphi - A\varepsilon^2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}} \\ y &= A(1-\tfrac{1}{4}\varepsilon^2)\varphi - \tfrac{3}{8}A\varepsilon^2\sin 2\varphi \end{aligned}\right\}. \quad (53)$$

Hier ist

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = -\frac{A(1-\varepsilon^2)\sin\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}\lambda;\qquad \frac{\partial x}{\partial\lambda} = \frac{A\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial\varphi} = \frac{A(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad \frac{\partial y}{\partial\lambda} = 0,$$

daher

$$k_m = \sqrt{1+\lambda^2\sin\varphi^2};\quad k_p = 1;\quad \sin\Theta = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2\sin\varphi^2}};$$

$$\cos\Theta = \frac{\lambda\sin\varphi}{\sqrt{1+\lambda^2\sin\varphi^2}};\quad \operatorname{tg}\Theta = \frac{1}{\lambda\sin\varphi};\quad \operatorname{tg}\omega' = \frac{\operatorname{tg}\omega}{1+\lambda\sin\varphi+\lambda^2\sin\varphi^2}.$$

Hierbei ist bemerkenswert, dass die Vergrösserung und Winkeländerung für diese Projektion ganz unabhängig sind von der Excentricität. Man erhält noch für die Winkeländerung:

$$\operatorname{tg}(\omega'-\omega) = \frac{\operatorname{tg}\omega' - \operatorname{tg}\omega}{1+\operatorname{tg}\omega\operatorname{tg}\omega'} = +\frac{\operatorname{tg}\omega(\lambda\sin\varphi+\lambda^2\sin\varphi^2)}{1+\lambda\sin\varphi+\lambda^2\sin\varphi^2+\operatorname{tg}\omega^2},$$

und da $1+\operatorname{tg}\omega^2 = \sec\omega^2$, so wird, wenn Zähler und Nenner mit $\cos\omega^2$ multipliciert wird:

$$\operatorname{tg}(\omega'-\omega) = \frac{\frac{1}{2}\sin 2\omega(\lambda\sin\varphi+\lambda^2\sin\varphi^2)}{1+\frac{1}{2}(\lambda\sin\varphi+\lambda^2\sin\varphi^2)(1+\cos 2\omega)}$$

$$= \frac{\dfrac{\frac{1}{2}(\lambda\sin\varphi+\lambda^2\sin\varphi^2)}{1+\frac{1}{2}(\lambda\sin\varphi+\lambda^2\sin\varphi^2)}\sin 2\omega}{1+\dfrac{\frac{1}{2}(\lambda\sin\varphi+\lambda^2\sin\varphi^2)}{1+\frac{1}{2}(\lambda\sin\varphi+\lambda^2\sin\varphi^2)}\cos 2\omega}.$$

Da

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{1}{\lambda \sin \varphi},$$

so wird

$$k_m = \operatorname{cosec} \Theta$$

$$\operatorname{tg} \omega' = \frac{\operatorname{tg} \omega}{1 + \cot \Theta + \cot \Theta^2} = \frac{\sin \Theta^2}{1 + \sin \Theta \cos \Theta} \operatorname{tg} \omega = \frac{\sin \Theta^2}{1 + \frac{1}{2} \sin 2\Theta} \operatorname{tg} \omega = \vartheta \operatorname{tg} \omega.$$

Tafel 15 giebt für λ und φ von 10 zu 10 Graden die Werte von Θ, und mit dem Argumente Θ die Werte von

$$\vartheta = \frac{\sin \Theta^2}{1 + \frac{1}{2} \sin 2\Theta}.$$

Da die Gleichung für y von λ unabhängig ist, so stellt dieselbe bereits die Gleichung der Parallelkreise vor; diese sind demnach auf der Karte gerade Linien, die in der Entfernung y parallel zur X-axe (Äquator) gezogen sind. Wollte man die Gleichung der Meridiane aufsuchen, so hätte man aus den beiden Gleichungen für x und y die Breite φ zu eliminieren. Da aber die Gleichung für y die Breite φ in Form eines elliptischen Integrals und als goniometrische Funktion enthält, so ist die Elimination nicht durchführbar. Wol könnte man, wenn man nur Glieder zweiter Ordnung der Excentricität mitnimmt, aus den Gleichungen für x und y die Werte für $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, demnach auch für $\sin 2\varphi$ durch x, y, λ und φ ausdrücken; dann giebt die Substitution des Wertes von $\sin 2\varphi$ in die Gleichung für y einen Wert von φ als Funktion von x, y und λ, dessen Substitution in die Gleichung für x die Gleichung der Meridiane giebt. Der bei der Elimination einzuschlagende Vorgang zeigt aber schon, dass das Resultat derselben nicht einfach sein, und für die Erkenntnis der Curve nicht wesentlich beitragen wird. Da aber ihre Gestalt von derjenigen für die Kugelabbildung nur äusserst wenig abweichen wird, so wird man ihre Form in dieser Vereinfachung am leichtesten erkennen; hiefür hat man die Gleichungen

$$x = a \lambda \cos \varphi$$
$$y = a \varphi,$$

demnach als Gleichung der Meridiane

$$\frac{x}{a} = \lambda \cos \frac{y}{a}.$$

Der Meridian von der Länge λ ist also eine Sinussoide von der Pfeilhöhe λ im Äquator. *D'Avezac* und *Germain* nannten diese Projektion daher auch *sinussoidale* Projektion. Die Zeichnung des Netzes wird sehr einfach. Äquator und erster Meridian werden durch zwei durch den Mittelpunkt der Karte auf einander senkrechte Gerade dargestellt. Trägt man für die Darstellung der Kugel auf dem Äquator die Werte $a\varphi$ auf, oder nimmt man für die Zeichnung des Netzes von 10 zu 10 Graden die Länge $g = A \operatorname{arc} 10^0$ als Einheit an, und trägt sie mehrmals auf dem Äquator auf, so

erhält man die Theilpunkte desselben, durch welche die Meridiane durchgehen. Man hat nun ebenso auf dem ersten Meridian den Wert $g = A$ arc 10^0 aufzutragen; die durch die Theilpunkte zum Äquator gezogenen Parallelen geben die Bilder der Parallelkreise, auf denen die Werte $g_\varphi = A \cdot \text{arc}\, 10^0 \cdot \cos\varphi = g \cos\varphi$ aufzutragen sind, wozu man sich der Werte von g_φ aus Tafel 13 bedienen kann. Die Verbindungslinien der auf den verschiedenen Parallelen liegenden zusammengehörigen Punkte geben die Meridiane.

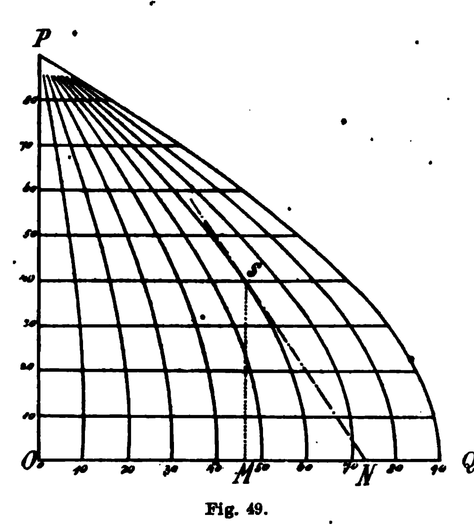


Fig. 49.

Für das Ellipsoid hat man auf dem ersten Meridian (siehe Fig. 49) von O aus die Grösse

$$y = A\int \frac{(1-\varepsilon^2)\, d\varphi}{(1-\varepsilon^2 \sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

aufzutragen. Es ist dies aber nichts anderes als die Länge des vom Äquator an gerechneten Meridianbogens, und man kann daher einfacher die aus Tafel 14 entnommenen Werte von l_φ successive (oder wenn die Parallelkreise nur z. B. von 10 zu 10^0 zu zeichnen sind, die entsprechenden Summen von je 10^0 der l_φ) auftragen. Auf den durch die Theilpunkte parallel zu ON gezogenen, die Parallelkreise darstellenden Geraden werden dann die zu dem Parallel gehörigen Werte von l'_φ aufgetragen, und die zum selben Meridian gehörigen Punkte durch stetige Linienzüge verbunden.

Man kann übrigens sehr leicht für irgend einen Punkt die Tangente an den Meridian construieren; es ist nämlich Θ der Winkel, den die Meridiane mit den Parallelkreisen einschliessen, daher der Winkel der Tangente mit der X-axe; für diesen war gefunden:

$$\text{tg}\, \Theta = \frac{1}{\lambda \sin\varphi} = \frac{y}{y\lambda \sin\varphi}.$$

Da für den Punkt $S : SM = y$, so wird, wenn

$$MN = MS \sin\varphi \,.\, \text{arc}\, \lambda,$$

NS die Tangente in P sein[1]), denn es ist

$$\text{tg}\, SNM = \text{tg}\, \Theta = \frac{MS}{MN} = \frac{1}{\lambda \sin\varphi}.$$

1) Zur Construktion von MN kann man sich auch der Tafel 13 bedienen, denn in der Columne g_φ ist der Wert von $\cos\varphi$; für den Punkt S ist z. B. arc λ (nach Tafel 8) 1·0472, $\sin\varphi$ nach Tafel 13 gleich 0·6428, daher

$$MN = 0{\cdot}6731\, MS.$$

Für den Pol ist $\varphi = 90^0$, daher wird

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{1}{\lambda}.$$

Trägt man daher von O aus nach Q die halbe Peripherie für den Halbmesser OP auf, also $OP \cdot \frac{\pi}{2}$ und theilt OQ in ebenso viel Theile, als Meridiane im Quadranten gezogen wurden, so sind die Verbindungslinien der Theilpunkte mit dem Pole P die Tangenten an die einzelnen Meridiane; denn für den Meridian von der Länge λ ist

$$OQ' = OQ \cdot \frac{\lambda}{\frac{\pi}{2}} = OP \cdot \lambda,$$

also

$$\operatorname{tg} Q'PO = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{also} \quad Q'PO = \Theta.$$

Für den 180. Meridian ist

$$\operatorname{tg} \Theta_{180} = \frac{1}{\pi},$$

daher

$$\Theta_{180} = 72^0 20' 36''.$$

Für die Darstellung der ganzen Erdoberfläche schliessen daher die beiden äussersten Meridiane am Pole einen Winkel von $144^0 41' 12''$ ein.

Man sieht aus Tafel 15, dass für mässige Werte von λ und besonders von φ die Winkeländerung Θ und daher auch die Vergrösserung k_m nur mässig ist. Es wird sich daher diese Projektion sehr gut eignen für Gegenden von nicht allzu grosser Längenausdehnung in der Nähe des Äquators, wie z. B. Afrika. In der That findet man in den meisten Atlanten die Karten von Afrika in derselben dargestellt.

Zum ersten Mal wurde sie 1650 verwendet von *Nicolas Sanson* (1600—1667) bei seinen Karten von Europa, Asien, Afrika und Amerika; später (1729) hat sie *John Flamsteed* bei den Himmelskarten in seinem Atlas coelestis gebraucht, und wurde sie seither nach ihm benannt. Jetzt findet man sie auch als *Sanson-Flamsteed*'sche Projektion bezeichnet, jedoch wollen wir sie nach ihrem ersten Erfinder die *Sanson*'sche Projektion nennen. 1865 wurde sie von Medicinalrath *Mohr* als neue, *isographische* Projektion zur Darstellung der ganzen Erdoberfläche, jedoch, wie aus Tafel 15 ersichtlich ist, gewiss mit Unrecht vorgeschlagen.[1])

35. *C*) Sollen die Parallelkreise durch Gerade dargestellt werden, die parallel zur X-axe gehen, so wird y von λ unabhängig, also

$$y = F(\varphi)$$

---

1) In der Sitzung der niederrheinischen Gesellschaft der Naturforscher und Ärzte, vom 6. Februar 1865. S. *Germain* l. c. pag. 91.

sein müssen; dann ist:

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial y}{d\varphi} = F'(\varphi)$$

und die zu integrierende Differentialgleichung wird

$$F'(\varphi)\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2},$$

demnach

$$x = \frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2 F'(\varphi)}\cdot\lambda + \chi(\varphi).$$

Soll der erste Meridian durch die Y-axe dargestellt werden, so muss für $\lambda = 0$ auch $x = 0$ sein, daher $\chi(\varphi) = 0$ und es werden die allgemeinen Gleichungen dieser äquivalenten Projektion

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2 F'(\varphi)}\cdot\lambda \\ y &= F(\varphi) \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

und für die Kugel

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{A^2\cos\varphi}{F'(\varphi)}\cdot\lambda \\ y &= F(\varphi) \end{aligned}\right\}. \tag{54a}$$

Hierbei ist $F(\varphi)$ noch willkürlich. Wählt man

$$F'(\varphi) = \frac{A(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}},$$

so erhält man die eben behandelte *Sanson*'sche Projektion. Man kann die Bedingung stellen, dass die Meridiane der Karte Curven von bestimmter Eigenschaft seien. Dabei darf man jedoch nicht ganz willkürlich vorgehen; denn sei die angenommene Curve durch die Gleichung

$$\Phi(x, y, \lambda) = 0 \tag{α}$$

dargestellt, so wird mit Rücksicht auf die Werte von x und y

$$\Phi\left\{\frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2\frac{dy}{d\varphi}}\lambda,\ y,\ \lambda\right\} = 0$$

sein müssen, aber aus dieser Gleichung muss λ wegfallen, weil die Gleichung für y der Annahme nach eine reine Funktion von φ sein soll. Dieses drückt sich analytisch durch die Beziehung aus

$$\frac{d\Phi}{d\lambda} = 0, \text{ oder } \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\lambda} = 0$$

und da

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{x}{\lambda}:$$

$$\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} + x\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0.$$

Diese Gleichung sagt aus, dass die Gleichung $\Phi(x, y, \lambda) = 0$ nach x und λ homogen von der nullten Ordnung sein muss, d. h.

eine blosse Funktion von $\frac{x}{\lambda}$ ist, sie wird also die Form haben

$$\Phi\left(\frac{x}{\lambda}, y\right) = 0, \tag{β}$$

welche in der That der oben erhaltenen Bedingung genügt.[1])

Sollen die Meridiane durch Ellipsen dargestellt werden, deren allgemeine Gleichung wir

$$\frac{x^2}{f(\lambda)^2} + \frac{y^2}{f_1(\lambda)^2} = 1$$

schreiben, so muss, weil diese Linien sämmtlich durch die beiden Pole gehen sollen, die Entfernung der Schnittpunkte der Meridiane mit dem ersten Meridian vom Mittelpunkte der Karte constant gleich dem halben Abstand m der beiden Pole sein. Da also für $x = 0$, $y = m$ sein soll, so muss

$$f_1(\lambda) = m$$

sein und die Gleichung wird mit Berücksichtigung des Wertes für x:

$$\left(\frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi\cdot\lambda}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2\cdot\frac{dy}{d\varphi}\cdot f(\lambda)}\right)^2 + \left(\frac{y}{m}\right)^2 = 1.$$

Soll sich hieraus y als blosse Funktion von φ ergeben, so muss $f(\lambda) = n\lambda$ sein; die Gleichung der Meridianellipse wird daher:

$$\frac{x^2}{(n\lambda)^2} + \frac{y^2}{m^2} = 1,$$

und die Bedingungsgleichung für y:

$$\frac{\sqrt{m^2-y^2}}{m} = \frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{n(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2\,\frac{dy}{d\varphi}}$$

und integriert:

$$\int\sqrt{m^2-y^2}\,dy = A^2\cdot\frac{m}{n}(1-\varepsilon^2)\int^{\circ}\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2},$$

oder

$$\tfrac{1}{2}y\sqrt{m^2-y^2} + \frac{m^2}{2}\arcsin\frac{y}{m}$$

$$= A^2\,\frac{m}{n}(1-\varepsilon^2)\left[\frac{\sin\varphi}{2(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)} + \frac{1}{4\varepsilon}\log_n\frac{1+\varepsilon\sin\varphi}{1-\varepsilon\sin\varphi}\right],$$

wo die Integrationsconstanten gleich Null sind, weil für $\varphi = 0$ auch $y = 0$ ist.

Hierzu kömmt

$$x = \frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2\,\frac{dy}{d\varphi}}\,\lambda.$$

---

1) Einfacher folgt dieses Resultat aus der Überlegung, dass bei der Elimination von φ aus den Gleichungen für x und y die Grössen x und λ immer in der Verbindung $\frac{x}{\lambda}$ auftreten.

Zur bequemeren Berechnung sei

$$y = m \sin \vartheta,$$

dann wird die linke Seite der obigen Gleichung:

$$\frac{m^2}{4} (2\vartheta + \sin 2\vartheta).$$

Setzt man Kürze halber

$$(1 - \varepsilon^2) \left[\frac{\sin \varphi}{2 (1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2)} + \frac{1}{4 \varepsilon} \log_n \frac{1 + \varepsilon \sin \varphi}{1 - \varepsilon \sin \varphi} \right] = g(\varphi),$$

so wird

$$2\vartheta + \sin 2\vartheta = \frac{4 A^2 g(\varphi)}{mn}.$$

Die hier eingeführten Grössen m, n sind aber für ein gegebenes Rotationsellipsoid nicht von einander unabhängig. Es ist nämlich eine Zone desselben vom Äquator bis zur Breite φ [1])

$$O_\varphi = 2\pi A^2 g(\varphi),$$

folglich die Zone zwischen zwei Meridianen von der Längendifferenz λ

$$O_{\varphi,\lambda} = A^2 g(\varphi) \cdot \lambda.$$

Für das halbe zwischen den beiden Meridianen enthaltene bis zu den beiden Polen reichende Zweieck folgt hieraus (da $\varphi = 90^0$ wird)

$$O_\lambda = A^2 \left(1 + \frac{1 - \varepsilon^2}{2 \varepsilon} \log_n \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right) \lambda.$$

Die Fläche des entsprechenden Zweieckes der Karte ist

$$\frac{\pi}{2} \cdot m \cdot n \lambda$$

und wegen der Äquivalenz ist auch, wenn Kürze halber

$$\left(1 + \frac{1 - \varepsilon^2}{2 \varepsilon} \log_n \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right) = \eta$$

gesetzt wird:

$$\frac{\pi}{2} m n \lambda = A^2 \eta \lambda,$$

demnach

$$\pi m n = 2 A^2 \eta,$$

woraus

$$2\vartheta + \sin 2\vartheta = \frac{2\pi g(\varphi)}{\eta}$$

folgt.[2]) Hieraus findet man

$$2(1 + \cos 2\vartheta) \frac{d\vartheta}{d\varphi} = 4 \cos \vartheta^2 \frac{d\vartheta}{d\varphi} = \frac{2\pi}{\eta} g'(\varphi) = \frac{2(1 - \varepsilon^2)}{\eta} \frac{\pi \cos \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2)^2}$$

daher

$$\frac{dy}{d\varphi} = m \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{d\varphi} = \frac{m}{2 \cos \vartheta} \cdot \frac{1 - \varepsilon^2}{\eta} \frac{\pi \cos \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2)^2} = \frac{A^2 (1 - \varepsilon^2)}{n \cos \vartheta} \frac{\cos \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2)^2}$$

1) S. z. B. *Herr*, Lehrbuch der höheren Mathematik II, pag. 344.

2) Diese Gleichung erhält man übrigens aus der Gleichung

$$2\vartheta + \sin 2\vartheta = \frac{4 A^2 g(\varphi)}{mn},$$

indem man $\varphi = 90^0$ setzt, welchem Werte $y = m$ und $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ entspricht.

mithin

$$x = \lambda \cdot n \cos \vartheta.$$

Man hat daher, alles zusammengestellt:

$$\left.\begin{aligned} 2\vartheta + \sin 2\vartheta &= \pi \frac{\left(\frac{\sin\varphi}{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2} + \frac{1}{2\varepsilon}\log_n\frac{1+\varepsilon\sin\varphi}{1-\varepsilon\sin\varphi}\right)(1-\varepsilon^2)}{1+\frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\log_n\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \\ y &= m\sin\vartheta \\ x &= n\lambda\cos\vartheta \end{aligned}\right\} \cdot \quad (55)$$

Für die Annahme einer kugelförmigen Erde wird[1])

$$2\vartheta + \sin 2\vartheta = \pi \sin\varphi. \qquad (55\text{a})$$

Tafel 16 giebt mit dem Argumente φ die Werte von ϑ, $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$ für die Annahme einer kugelförmigen Erde; und die wegen der Abplattung des Rotationssphäroids hinzuzufügenden Correktionen $\varDelta\vartheta$, $\varDelta\sin\vartheta$, $\varDelta\cos\vartheta$. Die Auflösung der Gleichung für ϑ für das Rotationssphäroid braucht nämlich nicht neu durchgeführt zu werden; es ist nämlich für dieses:

$$2\vartheta' + \sin 2\vartheta' = \pi \frac{\frac{\sin\varphi}{2(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)} + \frac{1}{4\varepsilon}\log_n\frac{1+\varepsilon\sin\varphi}{1-\varepsilon\sin\varphi}}{\frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} + \frac{1}{4\varepsilon}\log_n\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}},$$

also mit Benützung der Reihe § 33 für den Zähler, und derselben Reihe für $\sin\varphi = 1$ für den Nenner, bis inclusive Grössen dritter Ordnung der Excentricität:

$$2\vartheta' + \sin 2\vartheta' = \pi\sin\varphi \cdot \frac{1+\frac{2}{3}\varepsilon^2\sin\varphi^2}{1+\frac{2}{3}\varepsilon^2} = \pi\sin\varphi\left(1-\tfrac{2}{3}\varepsilon^2\cos\varphi^2\right),$$

oder

$$2\vartheta' + \sin 2\vartheta' = \pi\sin\varphi - \tfrac{2}{3}\pi\varepsilon^2\sin\varphi\cos\varphi^2.$$

Ist nun ϑ der zu derselben Breite φ gehörige Wert für die Kugel, wie er aus Tafel 16 folgt, so ist

$$2\vartheta + \sin 2\vartheta = \pi\sin\varphi$$

und die obere Gleichung davon subtrahiert:

$$2(\vartheta - \vartheta') + 2\sin(\vartheta - \vartheta')\cos(\vartheta + \vartheta') = \tfrac{2}{3}\pi\varepsilon^2\sin\varphi\cos\varphi^2.$$

Die Gleichung zeigt, dass die Differenz $\vartheta - \vartheta'$ von der Ordnung des Quadrates der Excentricität ist; vernachlässigt man daher consequenter Weise, wie dies schon bisher geschah, die vierten Potenzen derselben, so wird man $\sin(\vartheta - \vartheta')$ mit dem Bogen und $\vartheta + \vartheta'$ mit 2ϑ vertauschen können, und hat dann

$$(\vartheta - \vartheta')(1 + \cos 2\vartheta) = \tfrac{1}{3}\pi\varepsilon^2\sin\varphi\cos\varphi^2$$

und daraus, wenn statt des Bogens $\vartheta' - \vartheta$ gleich der Winkel angesetzt wird:

$$\vartheta' = \vartheta - \tfrac{1}{6}\,\frac{\pi\varepsilon^2\sin\varphi\cos\varphi^2}{\cos\vartheta^2}\cdot\frac{1}{\operatorname{arc} 1''}.$$

---

1) Wie aus der Reihenentwicklung der Logarithmen im Zähler und Nenner sofort folgt.

Für $\varphi = 90^0$ nimmt das Correktionsglied die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an; da aber hiefür die erste Gleichung (55) in (55a) übergeht, so sieht man, dass $\Delta\vartheta$ für $\varphi = 90^0$ verschwindet. Ist also

$$\Delta\vartheta = -\tfrac{1}{6}\,\frac{\pi\,\varepsilon^2 \sin\varphi\cos\varphi}{\cos\vartheta^2},$$

$$\Delta\sin\vartheta = +\cos\vartheta\,\Delta\vartheta; \quad \Delta\cos\vartheta = -\sin\vartheta\,\Delta\vartheta,$$

so wird für das Rotationsellipsoid

$$\vartheta' = \vartheta + \Delta\vartheta$$

$$\sin\vartheta' = \sin\vartheta + \Delta\sin\vartheta$$

$$\cos\vartheta' = \cos\vartheta + \Delta\cos\vartheta.$$

Diese Projektion gab zuerst *Mollweide.*[1]) Weitere Verbreitung erhielt sie aber erst durch *Jacques Babinet,* der ihr den Namen *homalographische* Projektion gab. Die Construktion derselben ist aus Formel (55) leicht zu entnehmen; da übrigens der Wert von A beliebig ist, so legt die Beziehung

$$m\,n\,\pi = 2\,A^2\,\eta$$

den Werten von m und n durchaus keine Beschränkung auf. Nimmt man diese ganz beliebig, so wird sich immer ein zugehöriges A ergeben; es ist selbst das Verhältnis von m und n beliebig, doch nimmt man n so, dass $m = \frac{n\pi}{2}$; dann wird das Bild des 90. Meridians ein Kreis. Um unter dieser Voraussetzung das Netz zu zeichnen, sei (Fig. 50) der Kreis K das Bild des 90. Meridians; CA das Bild des Äquators, CB dasjenige des ersten Meridians; theilt man, wenn z. B.

---

1) Siehe *Zachs* Monatliche Correspondenz 1805. Bd. XII p. 152: „Über die von Professor *Schmidt* in Giessen in der zweiten Abtheilung seines Handbuches der Naturlehre pag. 595 angegebene Projektion.“ *Schmidt* theilt den Äquator in gleiche Theile, und zieht die durch die Pole und die erhaltenen Theilpunkte gehenden Ellipsen; dann theilt er die Ellipsenquadranten in gleiche Theile, und verbindet die entsprechenden Theilpunkte. Dies verwirft *Mollweide*, und zieht statt dessen geradlinige Parallelkreise, so dass die Flächeninhalte gewahrt bleiben. Die Ableitung von *Mollweide* ist die folgende: Ist der Radius der Kugel $= a$, so ist der Halbmesser des Kreises, der dieselbe Gesammtfläche hat, wie die Halbkugel $a\sqrt{2}$. Sei nun (Fig. 50) $AH = \vartheta$, dann ist

$$HL = a\sqrt{2}\cos\vartheta; \quad LC = a\sqrt{2}\sin\vartheta,$$

die Fläche des Dreiecks

$$HCL = \tfrac{1}{2}HL\cdot CL = \tfrac{1}{2}\,a^2\sin 2\vartheta,$$

der Ausschnitt

$$AHC = a\sqrt{2}\cdot\vartheta\cdot\tfrac{1}{2}a\sqrt{2} = a^2\vartheta,$$

folglich die Fläche

$$AHLC = \frac{a^2}{2}\,(2\vartheta + \sin 2\vartheta).$$

Gehört nun HK zur Breite φ, so ist die Kugelzone $\tfrac{1}{2}a^2\pi\sin\varphi$, und es muss daher

$$2\vartheta + \sin 2\vartheta = \pi\sin\varphi$$

sein.

die Netzlinien von 10° zu 10° zu zeichnen sind, CA in 9 Theile, und zieht durch die Theilpunkte und die Pole B, B' die Ellipsen, so sind dieses die Bilder der Meridiane. Ist ferner $\sphericalangle ACH = \vartheta$, oder $LC = CH \sin \vartheta$ (nach Tafel 16), so ist HL das Bild des Parallelkreises von der Breite φ.[1])

Es ist auch hier wieder der Winkel der in einem Punkte des Meridians gezogenen Tangente mit der Richtung CA gleich dem Winkel, den der Meridian mit dem Parallel einschliesst. Um diesen zu finden haben wir wieder zur Anwendung der Formeln (50) auf diesen Fall:

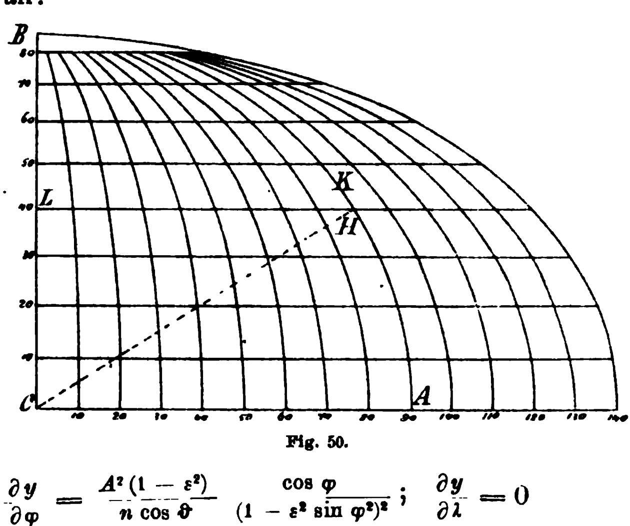


Fig. 50.

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{A^2(1-\varepsilon^2)}{n \cos \vartheta} \frac{\cos \varphi}{(1-\varepsilon^2 \sin \varphi^2)^2}; \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\lambda n \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{d\varphi} = -\frac{\lambda n \sin \vartheta}{2 \cos \vartheta^2} \cdot \frac{\pi \cos \varphi (1-\varepsilon^2)}{\eta (1-\varepsilon^2 \sin \varphi^2)^2},$$

oder

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\frac{A^2 \lambda (1-\varepsilon^2) \sin \vartheta}{m \cos \vartheta^2} \cdot \frac{\cos \varphi}{(1-\varepsilon^2 \sin \varphi^2)^2}; \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda} = n \cos \vartheta,$$

daher

$$k_m = \frac{A \cos \varphi}{n \cos \vartheta \sqrt{1-\varepsilon^2 \sin \varphi^2}} \sqrt{1+\left(\frac{n}{m} \lambda \operatorname{tg} \vartheta\right)^2}$$

$$k_p = \frac{n \cos \vartheta \sqrt{1-\varepsilon^2 \sin \varphi^2}}{A \cos \varphi}$$

$$k_m k_p = \sqrt{1+\left(\frac{n}{m} \lambda \operatorname{tg} \vartheta\right)^2},$$

folglich

$$\sin \Theta = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{m} \lambda \operatorname{tg} \vartheta\right)^2}}; \quad \cos \Theta = \frac{\frac{n}{m} \lambda \operatorname{tg} \vartheta}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{m} \lambda \operatorname{tg} \vartheta\right)^2}}$$

$$\operatorname{cotg} \Theta = \frac{n}{m} \lambda \operatorname{tg} \vartheta.$$

1) Die Fig. 70 in *Fiorini* ist unrichtig, denn die Abstände der Parallelen müssen gegen den Pol zu abnehmen, wie leicht aus den Werten von $\sin \vartheta$ folgt, während sie bei *Fiorini* zunehmen.

Anmerkung. Wiechel nimmt in einem Aufsatze[1]) als wichtigste für Erdkarten zu erfüllende Bedingung Äquivalenz an. Hierüber lässt sich nun allerdings streiten, und *Gauss*[2]), *Weber*[3]), *Eisenlohr*[4]) ziehen conforme Abbildungen vor. Aber das *eine* darf man wol behaupten, dass die äquatorealen und schrägen äquivalenten Longitudinalabwicklungen *Wiechel*'s (die Transversalabwicklungen sind, wie *Wiechel* selbst bemerkt, identisch mit den *Sanson*'schen, *Mercartor*'schen [er nennt sie *Bonne*'sche] und *Werner*'schen äquivalenten Abwicklungen) besser nicht „erfunden" worden wären, wenn man eine misglückte Transformation einer seit 1521 oder 1524 bekannten Projektionsart als „Erfindung" bezeichnen kann. Dies scheint *Wiechel* auch empfunden zu haben, und fasst sein Bedenken in die Worte zusammen: „Ob dagegen die lang gestreckte Form derselben (d. i. der äquatorealen Longitudinalprojektion) Freunde erwerben wird, ist sehr zweifelhaft." Dabei übersieht *Wiechel*, dass bei dieser Darstellung das Bild des Poles genau so gross ist, wie dasjenige des Äquators, selbst wenn man nur die halbe Erdkugel darstellt, während doch in den 350 Jahre ältern sogenannten *Apian*'schen Karten, wenigstens für diesen Fall das Bild des Poles ein Punkt ist.[5]) Diese zuerst von Petrus *Apianus*[6]) (oder *Bienewitz*) in seiner Cosmographie angewandte Projektionsmethode hat äquidistante Parallelkreise und kreisförmige Meridiane, welche durch die beiden Pole und die entsprechenden Theilpunkte des in gleiche Theile getheilten Äquators gehen, wie dies aus Fig. 51 ersichtlich ist. Um die ganze Erdkugel darzustellen, wird die Theilung des Äquators auch über den 90. Meridian fortgesetzt und durch die Theilpunkte werden Kreise gezogen, deren Halbmesser gleich demjenigen des 90. Meridians sind; dieselben werden bis zur Berührung mit den durch die beiden Pole gezogenen Parallelen gezeichnet. Bei *Apian* ist jedoch der Längengrad des Äquators um $\frac{1}{3}$ kleiner als der Breitengrad; daher stellt der Kreis, dessen Mittelpunkt O ist, den Meridian von der Länge 135° dar.[7]) Als eine Variante dieser Projektion ist die Projektion von *Heinrich Loritz* oder *Glareanus* (1527) zu betrachten, bei welcher das Netz der Meridiane dasselbe ist, die Bilder der Parallelkreise durch die Theilpunkte des in gleiche Theile getheilten Kreises PQ,

1) „Rationelle Gradnetzprojektionen". Der Civilingenieur, Jahrg. 1879, p. 401.

2) Allgemeine Lösung der Aufgabe, die Theile einer gegebenen Fläche so auf einer anderen gegebenen Fläche abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird. Ges. Werke IV. Bd. p. 189.

3) *Crelle*, Journal, Bd. 67, pag. 229.

4) *Crelle*, Journal, Bd. 72, pag. 143.

5) Über *Wiechel*'s zenitale Projektion s. § 41.

6) S. *D'Avezac*, Coup d'oeil historique sur la projection des cartes de géographie im Bulletin de la Société de geógraphie de Paris, V. Serie, Bd. V (1863), pag. 313. Nach *F. Wieser* (Sitzungsberichte der Wiener Academie der Wissenschaften, philos. Klasse, Bd. 82. „Der Portulan des Infanten Philipp II.") erweist sich diese Annahme als unhaltbar, da die Carta universale des *Benedetto Bordone* die „spätestens" 1521 verfasst sein soll, bereits in dieser Projektion dargestellt ist. Später wird sie häufig verwendet; das Kartenwerk des *Battista Agnese* von 1548 (Wiener Hofbibliothek Cod membr. Nr. 623) enthält eine Weltkarte in dieser Projektion (Blatt 13). Hingegen scheint die Weltkarte in dem „*Isolario di Benedetto Bordone*" aus dem Jahre 1534 (mir lag ein Exemplar vor, das im Besitze des k. k. militär-geographischen Institutes in Wien ist: Arch. Nr. 943) äquidistante Parallelkreise mit *elliptischen* Meridianen, deren Durchschnittspunkte mit dem Äquator äquidistant sind, zu haben, eine Projektion, die *Arago* in seiner Astronomie populaire beschreibt (s. *Tissot* l. c. p. 94).

7) *Gretschel*, Kartenprojektionen pag. 254.

dessen Mittelpunkt O ist, gehen. (S. dessen Werk *Henrici Glareani* poetae laureati de geografia liber uuus.) Hierher gehört auch eine Projektion von *P. Fournier*, bei welcher die Parallelkreise gerade Linien sind, parallel zu OQ durch die Theilpunkte des in gleiche Theile getheilten 90. Meridians PQ, die Meridiane Ellipsen durch die beiden Pole und die Theilpunkte von OQ, also wie bei der *Mollweide*schen Projektion.[1])

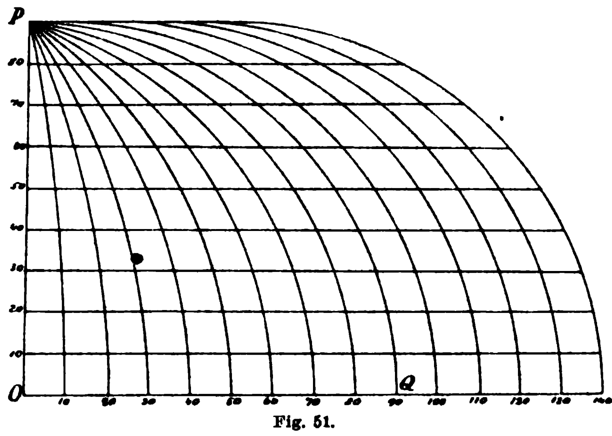


Fig. 51.

Ein anderes Beispiel einer äquivalenten Projektion mit geradlinigen Meridianen ist die von *Prépetit Foucaut* angegebene und von ihm *stereographische äquivalente* Projektion genannte, und zwar deshalb, weil die Entfernung der Parallelen vom Äquator dieselbe ist wie bei der stereographischen Projektion; d. h. es ist (für $\varepsilon = 0$):

$$y = A \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{A}{2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}},$$

also
$$x = \frac{A^2 \cos \varphi \lambda}{\frac{dy}{d\varphi}} = 2A \cos \varphi \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \lambda.$$

Um die Gleichung der Meridiane zu bestimmen hat man

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{A}\right)^2}} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + y^2}}$$

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{y}{\sqrt{A^2 + y^2}}$$

$$\cos \varphi = \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{A^2 - y^2}{A^2 + y^2}.$$

Daher:
$$x = 2A \frac{A^2 - y^2}{A^2 + y^2} \cdot \frac{A^2}{A^2 + y^2} \lambda$$

als Gleichung des Bildes der Meridiane, welche daher Curven 5. Ordnung sind.

---

1) *Tissot,* Mémoire sur la réprésentation des surfaces et lès cartes géographiques pg. 95.

36. *D*) Bei geradlinigen Parallelkreisen sollen die Meridiane geradlinig sein, und von einem Punkte ausgehen; dann wird (s. den vorigen §):

$$y = F(\varphi)$$
$$x = \frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi\cdot\lambda}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2 F'(\varphi)}.$$

Die Gleichung der Geraden, welche das Bild des Meridians sei, wird

$$y - b = x \operatorname{tg} \alpha$$

sein, wenn b die Entfernung des Schnittpunktes desselben mit der Y-axe vom Kartenmittelpunkte, α der Neigungswinkel derselben mit der X-axe ist. Da alle Meridiane die Y-axe im selben Punkte, nämlich im Pole schneiden, so muss b constant sein; es wird ferner der Neigungswinkel α nur von der Länge des Meridians abhängen, daher $\cot\alpha = G(\lambda)$ eine blosse Funktion der Länge, und die Gleichuug des Meridians wird

$$(y - b)\, G(\lambda) = x.$$

Diese Gleichung muss durch die oberen Werte von x und y identisch erfüllt werden. Substituiert man dieselben aber ein, so entsteht

$$\frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi\cdot\lambda}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2 F'(\varphi)} = [F(\varphi) - b]\, G(\lambda).$$

Diese Gleichung kann nur identisch, d. h. für jeden Wert von λ erfüllt werden, wenn

$$G(\lambda) = c\lambda$$

ist, und dann erhält man

$$\frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{c(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2\,\dfrac{dy}{d\varphi}} = y - b,$$

oder

$$(y - b)\frac{dy}{d\varphi} = \frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{c(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2},$$

und integriert

$$y^2 - 2by + C = \frac{1}{c}A^2(1-\varepsilon^2)\left[\frac{\sin\varphi}{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2} + \frac{1}{2\varepsilon}\log_n\frac{1+\varepsilon\sin\varphi}{1-\varepsilon\sin\varphi}\right].$$

Da für $\varphi = 0$, $y = 0$ werden soll, so wird $C = 0$; ferner ist $y = b$ für $\varphi = 90^0$, daher

$$-b^2 = \frac{1}{c}A^2(1-\varepsilon^2)\left[\frac{1}{1-\varepsilon^2} + \frac{1}{2\varepsilon}\log_n\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right] \qquad \text{(m)}$$

und durch Division der beiden Gleichungen:

$$\frac{2by - y^2}{b^2} = \frac{\dfrac{\sin\varphi}{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2} + \dfrac{1}{2\varepsilon}\log_n\dfrac{1+\varepsilon\sin\varphi}{1-\varepsilon\sin\varphi}}{\dfrac{1}{1-\varepsilon^2} + \dfrac{1}{2\varepsilon}\log_n\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}. \qquad (56)$$

Die Gleichung der Meridiane ist dann wegen $G(\lambda) = c\lambda$

$$(y - b)\, c\lambda = x,$$

wobei c mit b und A durch die Gleichung (m) verbunden ist. Wählt man also b und c beliebig, so kann man aus (m) den zugehörigen Wert von A bestimmen. Da man aber dem der Abbildung zu Grunde gelegten Ellipsoid einen beliebigen Äquatorradius geben kann, so wird c und b willkürlich gewählt werden können, wonach sich dann der Massstab der Karte bestimmen wird.

Um dieselbe zu construieren, sei Ox (Fig. 52) der Äquator, Oy der erste Meridian, P der Pol; damit ist $OP = b$ bestimmt. Für $y = 0$ ist

$$x = -bc\lambda,$$

daher ist $-bc\lambda$ die Entfernung des Schnittpunktes des Meridians von der Länge λ mit Ox. Setzt man $-bc = a$, so wird diese Entfernung $a\lambda$, und für den äussersten Meridian, für welchen $\lambda = \frac{\pi}{2}$ ist, $a\frac{\pi}{2}$. Nimmt man für diese Strecke OR an, so ist damit $a = \frac{2OR}{\pi}$, folglich auch c bestimmt. Für die übrigen Meridiane hat man OR in ebenso viele Theile zu theilen, als Meridiane gezogen werden sollen, und die Theilpunkte mit P zu verbinden.

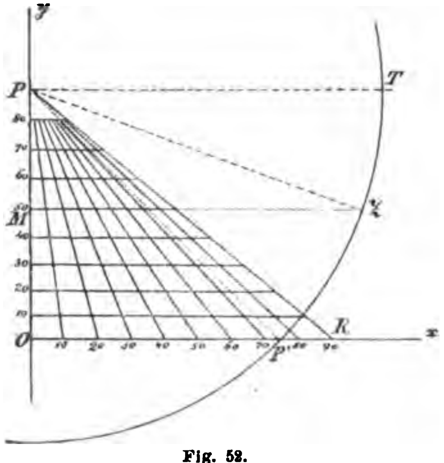


Fig. 52.

Um die Parallelkreise zu construieren hat man zunächst (s. pag. 163):

$$\frac{2by - y^2}{b^2} = \sin\varphi\,(1 - \tfrac{2}{3}\varepsilon^2 \cos\varphi^2)$$

$$b^2 - 2by + y^2 = b^2\,[1 - \sin\varphi + \tfrac{2}{3}\varepsilon^2 \sin\varphi\cos\varphi^2]$$

$$(b - y)^2 = 2b^2\left[\sin\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\varepsilon^2 \sin\varphi\cos\varphi^2\right]$$

$$b - y = b\sqrt{2}\sin\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)\left[1 + \tfrac{1}{6}\varepsilon^2 \frac{\sin\varphi\cos\varphi^2}{\sin\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)^2}\right]$$

$$y = b\left\{1 - \sqrt{2}\sin\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right) - \tfrac{1}{6}\sqrt{2}\cdot\varepsilon^2 \frac{\sin\varphi\cos\varphi^2}{\sin\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}\right\}$$

Die Werte von y können (für $b = 1$) aus Tafel 17 entnommen werden, welche für die Annahme der kugelförmigen Erde die Werte von

$$y = 1 - \sqrt{2}\sin\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)$$

und das wegen der Excentricität der Erde hinzuzulegende Correktionsglied

$$\eta = -\tfrac{1}{6}\sqrt{2}\,\varepsilon^2 \frac{\sin\varphi\cos\varphi^2}{\sin\left(45-\frac{\varphi}{2}\right)},$$

(letzteres in Einheiten der fünften Decimale) von 10 zu 10 Grad Breite giebt. Übrigens ist die Construktion von y mit Vernachlässigung der Excentricität nach dem Ausdrucke $b - y = b\sqrt{2}\sin\left(45-\frac{\varphi}{2}\right)$ sehr leicht. Sei MZ der gesuchte Parallelkreis der Breite φ, so muss $PM = b - y$, also

$$PM = OP\cdot\sqrt{2}\sin\left(45-\frac{\varphi}{2}\right)$$

sein. Macht man also

$$OP' = OP,$$

so ist

$$PP' = OP\sqrt{2},$$

daher

$$PM = PP'\sin\left(45-\frac{\varphi}{2}\right).$$

Ist $PZ = PP'$ und verbindet man P mit Z, so muss Winkel $PZM = 45 - \frac{\varphi}{2}$ oder $ZPM = 45 + \frac{\varphi}{2}$ und da (wegen $OP' = OP$) $P'PO = 45^0$, so ist $P'PZ = \frac{\varphi}{2}$; daraus ergiebt sich die folgende sehr einfache Construktion: Man mache $OP' = OP$, beschreibe mit PP' einen Kreisbogen aus dem Mittelpunkte P; ziehe $PT \parallel Ox$ und theile $P'T$ in so viele Theile, als man Parallelkreise zwischen 0 und 90^0 ziehen will, also wenn dieselben von 10 zu 10 Grad zu ziehen sind, in 9 Theile; die durch die Theilpunkte zu Ox gezogenen Parallelen sind die Bilder der Parallelkreise.[1])

Da

$$\frac{\partial y}{\partial\varphi} = \frac{1}{y-b}\,\frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{c\,(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2},\quad \frac{\partial y}{\partial\lambda} = 0$$

$$x = (y-b)\,c\,\lambda$$

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = c\,\lambda\,\frac{\partial y}{\partial\varphi},\qquad \frac{\partial x}{\partial\lambda} = c\,(y-b),$$

so ist

$$k_m = \frac{\partial y}{\partial\varphi}\sqrt{1+c^2\lambda^2}\,\frac{\sqrt{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^3}}{A\,(1-\varepsilon^2)} = \sqrt{1+c^2\lambda^2}\,\frac{A\cos\varphi}{(y-b)\,c\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}}$$

$$k_p = c\,(y-b)\,\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}}{A\cos\varphi}$$

---

1) *Colignan*, welcher diese Projektion in der vierten Note zu seiner Abhandlung „Recherches sur la représentation plane de la surface du globe terrestre“ im Journal de l'Ecole polytechnique Bd. 24 (1865) pag. 145 beschreibt, nimmt die Karte, welche im allgemeinen rhombisch wird, als Quadrat an; doch ist hierdurch eigentlich keine wesentliche Vereinfachung bedingt.

$$\sin\Theta = \frac{1}{\sqrt{1+c^2\lambda^2}}; \qquad \cot\Theta = c\lambda.$$

Der Winkel Θ ist also nur von λ abhängig, und für alle Punkte eines Meridians constant, wie es ja selbstverständlich ist.

37. *E*) Die Bilder der Parallelkreise sollen concentrische Kreise sein.

Um die Aufgabe in ihrer ganzen Allgemeinheit aufzufassen, wird es am besten, die Rechnung für Polarcoordinaten durchzuführen. In diesen drückt sich das Flächenelement der Ebene aus durch $\varrho\, d\varrho\, du$, wenn ϱ den Radiusvektor (hier Halbmesser des Parallels), u den Winkel an der Spitze bezeichnet; und dieses Flächenelement muss für äquivalente Projektionen gleich demjenigen des Ellipsoides sein; also

$$\varrho\, d\varrho\, du = -\frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi\, d\varphi\, d\lambda}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2},$$

wo das negative Zeichen daher rührt, dass zu positiven Werten von $d\varrho$ (wachsende Radien) negative Werte von $d\varphi$ (abnehmende Breiten) gehören.

ϱ und u sind nun Funktionen von φ und λ, und es wird

$$d\varrho = \frac{\partial\varrho}{\partial\lambda}\, d\lambda + \frac{\partial\varrho}{\partial\varphi}\, d\varphi,$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial\lambda}\, d\lambda + \frac{\partial u}{\partial\varphi}\, d\varphi,$$

daher

$$\varrho\frac{\partial\varrho}{\partial\varphi}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\, d\varphi^2 + \varrho\frac{\partial\varrho}{\partial\lambda}\frac{\partial u}{\partial\lambda}\, d\lambda^2 + \varrho\left(\frac{\partial\varrho}{\partial\varphi}\frac{\partial u}{\partial\lambda} + \frac{\partial\varrho}{\partial\lambda}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) d\varphi\, d\lambda$$
$$= -\frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi\, d\varphi\, d\lambda}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2}.$$

Dividiert man hier durch $d\varphi\, d\lambda$, so treten die Differentialquotienten $\frac{d\lambda}{d\varphi}, \frac{d\varphi}{d\lambda}$ auf; da aber φ und λ von einander unabhängige Variable sind, so werden diese Differentialquotienten verschwinden, und es bleibt

$$\varrho\frac{\partial\varrho}{\partial\varphi}\frac{\partial u}{\partial\lambda} + \varrho\frac{\partial\varrho}{\partial\lambda}\frac{\partial u}{\partial\varphi} = -\frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2}. \tag{57}$$

Macht man für ϱ oder u eine bestimmte Annahme, so findet man aus dieser Differentialgleichung den Wert der anderen Unbekannten.

a) Ist $\varrho = F(\varphi, \lambda)$ bekannt, so sind es auch $\frac{\partial F}{\partial\varphi}; \frac{\partial F}{\partial\lambda}$, und man hat eine partielle Differentialgleichung in u, an deren Stelle das System der totalen Differentialgleichungen

$$\frac{d\lambda}{F\frac{\partial F}{\partial\varphi}} = \frac{d\varphi}{F\frac{\partial F}{\partial\lambda}} = \frac{du}{-\frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2}}$$

tritt.

b) Ist $u = F(\varphi, \lambda)$ bekannt, so erhält man in ähnlicher Weise

$$\frac{d\varphi}{\frac{\partial u}{\partial \lambda}} = \frac{d\lambda}{\frac{\partial u}{\partial \varphi}} = \frac{\varrho\, d\varrho}{-\frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2}}.$$

Im Meridiane ist $d\lambda = 0$, folglich auf der Karte

$$d\varrho_m = \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi}\, d\varphi,\; du_m = \frac{\partial u}{\partial \varphi}\, d\varphi,$$

daher das dem Elemente des Erdmeridians $ds_m = r_m\, d\varphi$ entsprechende Bogenelement der Karte:

$$dS_m = \sqrt{(\varrho\, du_m)^2 + d\varrho_m^2} = \sqrt{\left(\varrho\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho}{\partial \varphi}\right)^2}\; d\varphi.$$

Im Parallel ist $d\varphi = 0$, folglich

$$d\varrho_p = \frac{\partial \varrho}{\partial \lambda}\, d\lambda; \quad du_p = \frac{\partial u}{\partial \lambda}\, d\lambda,$$

und das dem Element des Parallels auf dem Erdsphäroide $ds_p = r_p\, d\lambda$ entsprechende Element der Karte

$$dS_p = \sqrt{\left(\varrho\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho}{\partial \lambda}\right)^2}\; d\lambda.$$

Daher sind die entsprechenden Vergrösserungsverhältnisse:

$$\left.\begin{aligned} &\text{im Meridian } k_m = \sqrt{\left(\varrho\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^2}\;\frac{\sqrt{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^3}}{A(1-\varepsilon^2)} \\ &\text{im Parallel } k_p = \sqrt{\left(\varrho\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho}{\partial \lambda}\right)^2}\;\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}}{A\cos\varphi} \end{aligned}\right\}. \qquad (58a)$$

Alle übrigen Beziehungen bleiben genau dieselben, wie sie bei der Betrachtung der rechtwinkligen Coordinaten aufgestellt wurden (§ 32); es ist also

$$\left.\begin{aligned} \sin\Theta &= \frac{1}{k^m k_p} \\ k^2 &= k_m^2\cos\omega^2 + k_p^2\sin\omega^2 + 2k_m k_p\sin\omega\cos\omega\cos\Theta \\ \operatorname{tg}\omega' &= \frac{\operatorname{tg}\omega}{k_m^2 + k_m k_p\cos\Theta} = \frac{\operatorname{tg}\omega}{k_m^2 + \cot\Theta} \end{aligned}\right\}. \qquad (58\text{b})$$

38. Sollen, wie die Aufgabe ursprünglich gestellt war, die Bilder der Parallelkreise Kreise sein, so wird offenbar ϱ als Radius eines Parallelkreises für eine gegebene Breite constant, von λ unabhängig, also eine blosse Funktion von φ sein; demnach

$$\varrho = F(\varphi).$$

Zur Bestimmung von u dient dann, da $\frac{\partial \varrho}{\partial \lambda} = 0$ ist, die Gleichung:

$$d\lambda = -\frac{F(\varphi)\cdot F'(\varphi)\, du}{\frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2}},$$

deren Integral

$$\lambda = -\frac{F(\varphi)\, F'(\varphi)}{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2\cdot u + \psi(\varphi),$$

oder

$$u = -\frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2 F(\varphi) F'(\varphi)}\lambda + \chi(\varphi)$$

ist, wo $\chi(\varphi)$ eine willkürliche Funktion von φ ist, deren Bedeutung sich ergiebt, wenn man $\lambda = 0$ setzt; dann wird $u = \chi(\varphi)$. Es ist also dieses die Gleichung des ersten Meridians. Soll derselbe eine Gerade sein, und zwar jene, von welcher aus man die Winkel u zählt, so muss $\chi(\varphi) = 0$ sein, und die Grundgleichungen dieser äquivalenten Projektionen werden

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= F(\varphi) \\ u &= -\frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2 F(\varphi) F'(\varphi)}\cdot\lambda \end{aligned}\right\}. \tag{59}$$

Als ersten Spezialfall machen wir die Annahme, dass die Parallelkreise der Karte äquidistant seien. Dann wird

$$F(\varphi) = m - n\varphi,$$

also

$$F'(\varphi) = -n,$$

demnach

$$u = +\frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi\cdot\lambda}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2 n(m-n\varphi)}.$$

Dabei sind noch m und n willkürlich. Stellt man die Bedingung, dass der Pol Mittelpunkt der Karte werde, so wird für $\varphi = 90^0$ $\varrho = 0$ werden, also

$$0 = m - n\frac{\pi}{2}$$

daher

$$\varrho = n\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

$$u = \frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi\cdot\lambda}{n^2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2}.$$

Da hier wieder die Wahl des Kugelhalbmessers beliebig ist, so kann man $n = A$ setzen, und hat dann, wenn noch statt der geographischen Breite die Poldistanz $90 - \varphi = p$ eingeführt wird,

$$\varrho = Ap$$

$$u = \frac{(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2\cos p^2)^2}\,\frac{\sin p}{p}\,\lambda.$$

Diese Projektion wurde von *Johann Werner* von Nürnberg (1468—1528) angegeben. Die Parallelkreise sind äquidistante concentrische Kreise mit dem Pole als Mittelpunkt. Die auf irgend einem Parallelkreis von der Poldistanz p von den verschiedenen zu gleichen Längenunterschieden gehörigen Meridianen abgeschnittenen Bögen sind gleich; man braucht daher nur einen zu zeichnen, um die anderen durch Eintheilung beziehungsweise Übertragung zu finden.

Da übrigens, wenn wir uns für das Weitere auf die Kugel beschränken,

$$\varrho = Ap, \qquad u = \frac{\sin p}{p} \cdot \lambda,$$

demnach

$$\varrho u = A \sin p\lambda,$$

ist, so sieht man, dass der Bogen ϱu des Parallelkreises von der Breite φ auf der Karte, gleich ist dem Bogen $A \sin p\lambda$ des Parallels der Kugel; demnach wird die Construktion des Kartennetzes sehr einfach. Aus dem Pole als Mittelpunkt werden concentrische äquidistante Kreise beschrieben, welche die Parallelkreise der Karte vorstellen und auf jedem Kartenparallel wird die wahre Länge des zwischen zwei Meridianen enthaltenen Parallelbogens der Kugel aufgetragen. Sind z. B. in Fig. 53 die Netzlinien von 10 zu 10⁰ zu zeichnen, und ist $ab = g$, so trägt man auf dem Parallel der Breite φ das Stück $g_\varphi = g \cos \varphi$ auf, welchen Wert man aus Tafel 13 entnehmen kann. Fig. 53 stellt das Kartennetz in dieser Projektion vor. Es ist jedenfalls als ein wesentlicher Nachtheil dieser äquivalenten Projektion zu bezeichnen, dass im Mittelpunkte der Karte selbst (im Pole) bereits eine Klaffung eintritt, und daher eine Zerreissung des Bildes.

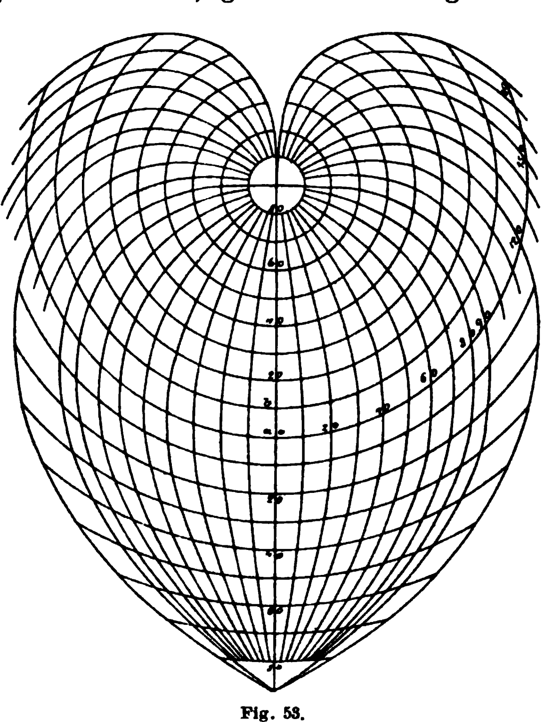


Fig. 53.

Aus den Gleichungen

$$\varrho = Ap$$

$$u = \frac{\sin p}{p} \lambda$$

findet man

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} = \frac{\partial \varrho}{\partial p} \frac{dp}{d\varphi} = -A; \quad \frac{\partial \varrho}{\partial \lambda} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \left(\frac{\sin p}{p^2} - \frac{\cos p}{p}\right) \lambda; \quad \frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{\sin p}{p},$$

daher

$$k_m = \sqrt{1 + \lambda^2 \left(\frac{\sin p}{p} - \cos p\right)^2}; \quad k_p = 1,$$

$$\sin \Theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 \left(\frac{\sin p}{p} - \cos p\right)^2}}; \quad \cot \Theta = \lambda \left(\frac{\sin p}{p} - \cos p\right).$$

Hat man für ein gegebenes p und λ den Wert von Θ gerechnet, so ist dann

$$k_m = \operatorname{cosec} \Theta.$$

39. Die Parallelkreise sollen Kreise sein, und dabei die Meridiane geradlinig, von einem Punkte ausgehend; die Projection wird also mit Rücksicht auf das seinerzeit hierüber bemerkte eine äquivalente Kegelprojection. Wegen der ersten Bedingung gelten die Gleichungen

$$\varrho = F(\varphi)$$
$$u = -\frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2 F(\varphi) F'(\varphi)} \cdot \lambda.$$

Weil aber die Meridiane geradlinig sein sollen, so wird der Radiusvector eines Punctes das Bild des Meridians desselben sein; es muss daher u von φ unabhängig sein, also

$$-\frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2 F(\varphi) F'(\varphi)} = m,$$

wenn m eine Constante ist; dann wird

$$u = m\lambda,$$

während man für $F(\varphi)$ die Gleichung erhält:

$$\varrho \frac{d\varrho}{d\varphi} = F(\varphi) F'(\varphi) = -\frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{m(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2},$$

und hieraus durch Integration

$$\varrho^2 + C = -\frac{A^2(1-\varepsilon^2)}{m}\left[\frac{\sin\varphi}{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2} + \frac{1}{2\varepsilon}\log_n \frac{1+\varepsilon\sin\varphi}{1-\varepsilon\sin\varphi}\right] \quad (60)$$

oder

$$\varrho^2 + C = -\frac{2A^2(1-\varepsilon^2)}{m}\left[1 + \tfrac{2}{3}\varepsilon^2\sin\varphi^2 + \tfrac{3}{5}\varepsilon^4\sin\varphi^4\right]\sin\varphi. \quad (60a)$$

Für die Bestimmung von C und m kann man wieder verschiedene Annahmen machen:

a) Soll der Pol durch einen Punkt dargestellt werden, so muss für $\varphi = 90^0$, $\varrho = 0$ werden: dann wird:

$$C = -\frac{2A^2(1-\varepsilon^2)}{m}\left[1 + \tfrac{2}{3}\varepsilon^2 + \tfrac{3}{5}\varepsilon^4\right],$$

daher

$$\varrho^2 = \frac{2A^2(1-\varepsilon^2)}{m}\left[(1-\sin\varphi) + \tfrac{2}{3}\varepsilon^2(1-\sin\varphi^3) + \tfrac{3}{5}\varepsilon^4(1-\sin\varphi^5)\right]$$

$$\varrho^2 = \frac{4A^2(1-\varepsilon^2)}{m}\sin\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)^2\left[1 + \tfrac{2}{3}\varepsilon^2(1+\sin\varphi+\sin\varphi^2)\right],$$

wenn die vierten Potenzen der Excentricität vernachlässigt werden; daher

$$\varrho = \frac{2A\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{m}} \sin\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)\left(1 + \tfrac{1}{3}\varepsilon^2\left(1 + \sin\varphi + \sin\varphi^2\right)\right).$$

Die Gleichungen dieser Projection werden demnach

$$\left.\begin{aligned} u &= m\lambda \\ \varrho &= \frac{2A\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{m}} \sin\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)\left(1 + \tfrac{1}{3}\varepsilon^2\left(1 + \sin\varphi + \sin\varphi^2\right)\right) \end{aligned}\right\}, \qquad (61)$$

mithin

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \lambda} = m,$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} = -\frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{m\varrho(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2}, \quad \frac{\partial \varrho}{\partial \lambda} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} k_m &= \frac{A\cos\varphi}{m\varrho\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}}, \quad k_p = \frac{m\varrho\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}}{A\cos\varphi} \\ \sin\Theta &= 1; \quad \Theta = 90^0; \quad \operatorname{tg}\omega' = \frac{m^2\varrho^2(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)}{A^2\cos\varphi^2}\operatorname{tg}\omega^2 \end{aligned}\right\}. \qquad (61a)$$

Für den Fall der Kugel[1]) erhält man hieraus

$$k_m = \frac{2A\sin(45-\frac{1}{2}\varphi)\cos(45-\frac{1}{2}\varphi)}{m\cdot\frac{2A}{\sqrt{m}}\sin(45-\frac{1}{2}\varphi)} = \frac{\cos(45-\frac{1}{2}\varphi)}{\sqrt{m}}; \quad k_p = \frac{\sqrt{m}}{\cos(45-\frac{1}{2}\varphi)}$$

$$\operatorname{tg}\omega' = \frac{m}{\cos(45-\frac{1}{2}\varphi)^2}\operatorname{tg}\omega.$$

Soll für eine gegebene Breite φ_0 das Verhältnis der Meridiane und Parallelkreise gleich sein demjenigen auf der Kugel, dann wird für diesen $k_m = k_p$ sein, also

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\cos\left(45 - \frac{\varphi_0}{2}\right) = \frac{\sqrt{m}}{\cos\left(45 - \frac{\varphi_0}{2}\right)},$$

daher

$$m = \cos\left(45 - \frac{\varphi_0}{2}\right)^2.$$

Diese Projektion rührt von *J. H. Lambert* her (s. dessen Beiträge zum Gebrauche der Mathematik III p. 187) und ist die von *Germain* (l. c. pag. 101) mit dem Namen *isosphärische stenotere* bezeichnete.

b) Setzt man $m = 1$, so werden die Längendifferenzen in ihrer wahren Grösse erscheinen, und man hat

$$\left.\begin{aligned} u &= \lambda \\ \varrho &= 2A\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)\left(1 + \tfrac{1}{3}\varepsilon^2\left(1 + \sin\varphi + \sin\varphi^2\right)\right) \end{aligned}\right\}. \qquad (61b)$$

---

1) Dasselbe Resultat erhält man durch Anwendung der Formeln des § 22 für Kegelprojektionen; es ist nämlich $\varrho = a + f(\varphi)$, daher $f'(\varphi) = -\frac{r}{\sqrt{m}}\cos\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)$, woraus v_0 und v_{90} folgen.

Auch diese Projektion rührt von *Lambert* her[1]), der dieselbe auch für den Fall angewendet hat, dass der Mittelpunkt der Karte nicht in den Pol hinein fällt; es ist dann eine äquivalente Zenitalprojektion; dabei tritt an die Stelle von Poldistanz und Längendifferenz der sphärische Abstand eines Punktes vom Mittelpunkte des darzustellenden Flächentheiles und der Winkel der beiden durch je einen Punkt und diesen Mittelpunkt gelegten grössten Kreise. Doch wird diese Projektion auch mitunter fälschlich als Projektion von *Lorgna* bezeichnet, der sie in seinen Principien der astronomischen Geographie 1789 verwendete.[2]) *Germain* nennt sie *isosphärische isomere* Projektion (l. c. pag. 101).

Um nach derselben ein Kartennetz zu zeichnen, sind die Meridiane als gerade Linien durch den Pol so zu ziehen, dass die von denselben eingeschlossenen Winkel gleich den wahren sind; für die Parallelkreise hat man für den Fall der Kugel $\varrho = 2A \sin\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)$ oder durch Einführung der Poldistanz $p = 90 - \varphi$

$$\varrho = 2A \sin\frac{p}{2};$$

dieses ist aber die Sehne, welche zum Winkel p gehört. Es ist also der Radius des Parallelkreises von der Poldistanz p gleich der Sehne zwischen dem Pol und einem Punkte dieses Parallels. Ist daher AO (Fig. 54) der Halbmesser der Kugel, und AX die Umlegung eines Meridians, ferner $AOP = p$, so ist AP der Halbmesser des Parallels der Karte. Theilt man daher AX in so viel Theile, als Parallelkreise verzeichnet werden sollen, so sind die durch die Theilpunkte gezogenen Kreise die Bilder der Parallelen.[3])

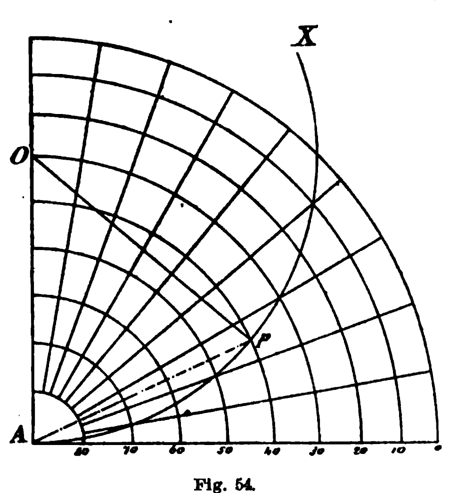


Fig. 54.

1) Beiträge III pag. 184.

2) S. *Gretschel*, Lehrbuch der Landkartenprojektionen (p. 187).

3) Diese Projektion wurde neuerdings von *Colignon* (s. dessen Abhandlung „Recherches sur la réprésentation plane de la surface du globe terrestre" im Journal de l'Ecole polytechnique 1865, pag. 73ff.) als neu unter dem Namen *Système centrale* eingeführt (s. die Definition l. c. pag. 83) und später von *Coatpont* empfohlen (s. dessen beide Abhandlungen „Propriété et construction d'une carte des deux continents en projection azimutale équivalente" im Bulletin de la société de Géographie VI Serie. Bd. 13 (1877) und „Analyse d'une carte réprésentant l'Asie et l'Europe" Bulletin de la société de Géographie VI Serie, Bd. 16 (1878).

Übrigens giebt Tafel (20) den Wert von $\varrho = 2A \sin\frac{p}{2}$

$$k_1 = \cos\frac{p}{2},\quad k_2 = \sec\frac{p}{2}$$

und die grösste Winkeländerung $\frac{\delta}{2}$, so wie die entsprechenden Werte ϱ', k_1', k_2', $\frac{\delta}{2}$ für das Ellipsoid, welche aus (61) und (61 a) für $m = 1$ hervorgehen.

c) Der Kegel soll die Kugel im mittleren Parallel berühren, dann ist $m = \sin\beta$ und für $\varphi = \beta$: $\varrho = A\cot\beta$; daher

$$\varrho^2 + C = -2A^2\frac{\sin\varphi}{\sin\beta}$$

$$A^2\cot\beta^2 + C = -2A^2$$

daher

$$\varrho^2 = A^2\cot\beta^2 + 2A^2\left(1 - \frac{\sin\varphi}{\sin\beta}\right) = A^2\left[\operatorname{cosec}\beta^2 + 1 - 2\frac{\sin\varphi}{\sin\beta}\right],$$

oder

$$\varrho = \frac{A}{\sin\beta}\sqrt{1 + \sin\beta^2 - 2\sin\varphi\sin\beta} \tag{62}$$

Hiernach wird der Abstand des Parallels von der Breite φ von dem mittleren Parallel, dessen Breite β ist:

$$q = \varrho - \varrho_0 = \frac{A}{\sin\beta}\left[\sqrt{1 + \sin\beta^2 - 2\sin\varphi\sin\beta} - \cos\beta\right]$$

$$= \frac{A}{\sin\beta}\,\frac{1 + \sin\beta^2 - 2\sin\varphi\sin\beta - \cos\beta^2}{\sqrt{1 + \sin\beta^2 - 2\sin\varphi\sin\beta} + \cos\beta} = A\,\frac{2(\sin\beta - \sin\varphi)}{\sqrt{1 + \sin\beta^2 - 2\sin\beta\sin\varphi} + \cos\beta}$$

Setzt man hier $\beta = 0$, so geht die Projektion in eine Cylinderprojektion über, und es wird hiefür $\varrho = \infty$; man erhält aber $x = ru$, und y gleich dem Abstande des Parallels vom Äquator, also gleich dem obigen Werte von q für $\beta = 0$, demnach

$$y = -A\sin\varphi.$$

also die bereits § 25 erwähnte *Lambert*'sche äquivalente Projektion.

40. *d*) Die Längengrade sollen in zwei bestimmten Parallelen, deren Breiten φ_1 und φ_2 sind, im wahren Verhältnis zu den Breitengraden dargestellt werden. Die Länge des auf der Karte einer Längendifferenz λ entsprechenden Bogens auf den Parallelen der Breite φ_1 und φ_2 ist: $\varrho_1 u$ bez. $\varrho_2 u$.

Auf der Erdoberfläche sind die zugehörigen Bögen der Parallelkreise

$$\frac{A\cos\varphi_1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin\varphi_1^2}}\,\lambda \text{ und } \frac{A\cos\varphi_2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin\varphi_2^2}}\,\lambda.$$

Es bestehen daher die Gleichungen

$$\varrho_1 u = \varrho_1 m \lambda = \frac{A \cos \varphi_1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi_1^2}} \lambda$$

$$\varrho_2 u = \varrho_2 m \lambda = \frac{A \cos \varphi_2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi_2^2}} \lambda.$$

Quadriert man diese Gleichungen, nachdem beiderseits der Factor λ weggelassen wurde, und setzt für ϱ_1^2, ϱ_2^2 die Werte aus (60) ein, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} - m^2 C - A^2 (1 - \varepsilon^2)\, m \left[\frac{\sin \varphi_1}{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi_1^2} + \frac{1}{2\varepsilon} \log_n \frac{1 + \varepsilon \sin \varphi_1}{1 - \varepsilon \sin \varphi_1}\right] \\ = \frac{A^2 \cos \varphi_1^2}{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi_1^2} \\ - m^2 C - A^2 (1 - \varepsilon^2)\, m \left[\frac{\sin \varphi_2}{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi_2^2} + \frac{1}{2\varepsilon} \log_n \frac{1 + \varepsilon \sin \varphi_2}{1 - \varepsilon \sin \varphi_2}\right] \\ = \frac{A^2 \cos \varphi_2^2}{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi_2^2} \end{aligned}\right\}. \tag{63}$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann man nun die Werte von C und m bestimmen. Durch Subtraction der beiden Gleichungen folgt:

$$\begin{aligned} A^2 (1 - \varepsilon^2)\, m \Bigg\{ & \frac{\sin \varphi_2}{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi_2^2} - \frac{\sin \varphi_1}{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi_1^2} \\ & + \frac{1}{2\varepsilon} \left(\log_n \frac{1 + \varepsilon \sin \varphi_2}{1 - \varepsilon \sin \varphi_2} - \log_n \frac{1 + \varepsilon \sin \varphi_1}{1 - \varepsilon \sin \varphi_1}\right)\Bigg\} \\ & = A^2 \left\{\frac{\cos \varphi_1^2}{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi_1^2} - \frac{\cos \varphi_2^2}{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi_2^2}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon^2)\, m \Bigg\{ & \frac{(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)(1 + \varepsilon^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2)}{(1 - \varepsilon^2 \sin \varphi_2^2)(1 - \varepsilon^2 \sin \varphi_1^2)} \\ & + \frac{1}{2\varepsilon} \log_n \frac{(1 + \varepsilon \sin \varphi_2)(1 - \varepsilon \sin \varphi_1)}{(1 - \varepsilon \sin \varphi_2)(1 + \varepsilon \sin \varphi_1)}\Bigg\} \\ & = \frac{(\cos \varphi_1^2 - \cos \varphi_2^2) + \varepsilon^2 (\sin \varphi_1^2 \cos \varphi_2^2 - \cos \varphi_1^2 \sin \varphi_2^2)}{(1 - \varepsilon^2 \sin \varphi_1^2)(1 - \varepsilon^2 \sin \varphi_2^2)}. \end{aligned}$$

Der Zähler des Ausdruckes rechts ist aber

$$\begin{aligned} & (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) \\ & + \varepsilon^2 (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) \\ & = 4 \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \\ & \quad - 4 \varepsilon^2 \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \\ & = 4 (1 - \varepsilon^2) \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}, \end{aligned}$$

und da

$$\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 = 2 \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2},$$

so erhält man aus obiger Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} m\left\{1+\varepsilon^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \right. \\ \left. +\dfrac{(1-\varepsilon^2\sin\varphi_1^2)(1-\varepsilon^2\sin\varphi_2^2)}{4\varepsilon\sin\dfrac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\cos\dfrac{\varphi_2+\varphi_1}{2}}\log_n\dfrac{(1+\varepsilon\sin\varphi_2)(1-\varepsilon\sin\varphi_1)}{(1-\varepsilon\sin\varphi_2)(1+\varepsilon\sin\varphi_1)}\right\} \\ \qquad = 2\sin\dfrac{\varphi_2+\varphi_1}{2}\cos\dfrac{\varphi_2-\varphi_1}{2} \end{array}\right\}. \quad (63\,\text{a})$$

Entwickelt man den Coefficienten von m in eine Reihe, und bleibt bei den zweiten Potenzen der Excentricität stehen, so wird derselbe

$$1+\varepsilon^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2+\frac{(1-\varepsilon^2\sin\varphi_1^2)(1-\varepsilon^2\sin\varphi_2^2)}{4\varepsilon\sin\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}}$$

$$\times(2\varepsilon\sin\varphi_2+\tfrac{2}{3}\varepsilon^3\sin\varphi_2^3-2\varepsilon\sin\varphi_1-\tfrac{2}{3}\varepsilon^3\sin\varphi_1^3)$$

$$=1+\varepsilon^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2+\frac{1-\varepsilon^2(\sin\varphi_1^2+\sin\varphi_2^2)}{2\sin\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}}(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1)$$

$$\times\left[1+\frac{\varepsilon^2}{3}(\sin\varphi_2^2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1^2)\right]$$

$$=1+\varepsilon^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2+1-\varepsilon^2(\sin\varphi_1^2+\sin\varphi_2^2)$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{3}(\sin\varphi_2^2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1^2)$$

$$=2-\tfrac{1}{3}\varepsilon^2(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1)^2=2\left[1-\tfrac{4}{3}\varepsilon^2\sin\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}^2\cos\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}^2\right],$$

demnach

$$m=\sin\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\left[1+\tfrac{4}{3}\varepsilon^2\sin\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}^2\cos\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}^2\right]$$

und dann wird:

$$\varrho^2-\varrho_1^2=\frac{A^2(1-\varepsilon^2)}{m}\left\{\frac{\sin\varphi_1}{1-\varepsilon^2\sin\varphi_1^2}-\frac{\sin\varphi}{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\varepsilon}\log_n\frac{(1+\varepsilon\sin\varphi_1)(1-\varepsilon\sin\varphi)}{(1-\varepsilon\sin\varphi_1)(1+\varepsilon\sin\varphi)}\right\}$$

oder in Reihenform:

$$\varrho^2-\varrho_1^2=\frac{2A^2(1-\varepsilon^2)}{m}(\sin\varphi_1-\sin\varphi)$$

$$\times[1+\tfrac{2}{3}\varepsilon^2(\sin\varphi_1^2+\sin\varphi_1\sin\varphi+\sin\varphi^2)],$$

wobei m den oben bestimmten Wert hat, und ϱ_1 sich aus der Gleichung

$$\varrho_1 m=\frac{A\cos\varphi_1}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi_1^2}},$$

also

$$\varrho_1=\frac{A\cos\varphi_1}{m\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi_1^2}}$$

bestimmt.

Es sind daher die Gleichungen dieser Projektion

$$\left.\begin{aligned}
&u = m\lambda \\
&m = \sin\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\left[1+\tfrac{4}{3}\varepsilon^2\sin\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}^2\cos\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}^2\right] \\
&\varrho_1 = \frac{A\cos\varphi_1}{m\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi_1^2}} \\
&\varrho^2-\varrho_1^2 = \frac{2A^2(1-\varepsilon^2)}{m}(\sin\varphi_1-\sin\varphi) \\
&\qquad\times\left[1+\tfrac{2}{3}\varepsilon^2(\sin\varphi_1^2+\sin\varphi_1\sin\varphi+\sin\varphi^2)\right]
\end{aligned}\right\}. \tag{64}$$

Es ist nun

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi} = 0; \qquad \frac{\partial u}{\partial\lambda} = m,$$

$$\frac{\partial\varrho}{\partial\varphi} = -\frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{m\varrho(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2}; \quad \frac{\partial\varrho}{\partial\lambda} = 0,$$

folglich

$$\left.\begin{aligned}
&k_m = \frac{A\cos\varphi}{m\varrho\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}}; \quad k_p = \frac{m\varrho\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}}{A\cos\varphi} \\
&\sin\Theta = 1; \qquad \operatorname{tg}\omega' = \frac{m^2\varrho^2(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)}{A^2\cos\varphi^2}\operatorname{tg}\omega.
\end{aligned}\right\}. \tag{64a}$$

Dieses ist die Kegelprojektion von *Albers.*[1]) Um sie für zwei gegebene Breiten φ_1, φ_2 zu construieren, berechnet man zunächst die Werte von m und ϱ_1. Trägt man ϱ_1 von dem Punkte B, dessen Breite φ_1 ist, auf dem ersten Meridian BO auf, so erhält man den Mittelpunkt der Parallelkreise. Die Formel (64) giebt sodann die Werte der Halbmesser ϱ, mit denen man die Parallelkreise zeichnet. Trägt man in dem gemeinschaftlichen Centrum O die Winkel $m\lambda$ von dem mittleren Meridian aus auf, so erhält man die Meridiane der Karte. Man kann das Centrum O, wenn man sich auf die Kugel beschränkt, jedoch auch sehr einfach constructiv bestimmen. Es ist nämlich (Fig. 55)

$$\varrho_1 : \varrho_2 = \cos\varphi_1 : \cos\varphi_2,$$

daher, wenn

$$\varrho_1 - \varrho_2 = l$$

ist

$$\varrho_1 : \varrho_2 : l = \cos\varphi_1 : \cos\varphi_2 : \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2.$$

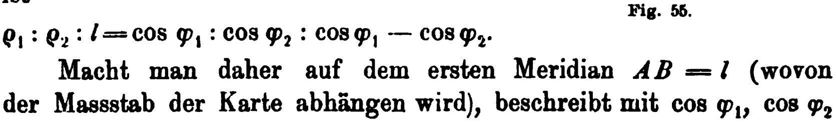


Fig. 55.

Macht man daher auf dem ersten Meridian $AB = l$ (wovon der Massstab der Karte abhängen wird), beschreibt mit $\cos\varphi_1$, $\cos\varphi_2$

1) Monatliche Correspondenz von *Zach*, Bd. 12 (1805) pag. 450.

Bögen k_1, k_2 aus den Mittelpunkten A, B, und zieht die gemeinschaftliche Tangente ab, so ist der Schnittpunkt O derselben mit AB die Kegelspitze. Denn es ist, wenn Aa, Bb senkrecht auf ab gezogen werden:

$$OB:OA:AB = Bb:Aa:(Bb - Aa)$$
$$= \cos\varphi_1 : \cos\varphi_2 : (\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)$$

AB ist dann die Erzeugende des Kegels, Ob die Kegelaxe.[1])

41. Die Abstände der Parallelkreise sind gleich denjenigen auf dem Ellipsoide. *Mercator's* äquivalente Projektion. Es gelten die Gleichungen

$$\varrho = F(\varphi)$$
$$u = -\frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2 F(\varphi) F'(\varphi)}\lambda.$$

Ist nun der Halbmesser des mittleren Parallels von der Breite β gleich a, so wird

$$\varrho = a + f(\beta - \varphi)$$

und $f(\beta - \varphi)$ ist die Länge des elliptischen Meridianbogens zwischen den Parallelkreisen von der Breite φ und β; das Element derselben ist

$$ds = -\frac{A(1-\varepsilon^2)\,d\varphi}{\sqrt{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^3}},$$

folglich

$$F(\varphi) = a - A(1-\varepsilon^2)\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^3}}$$

$$F'(\varphi) = \frac{ds}{d\varphi} = -\frac{A(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$u = \frac{A\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}}\cdot\frac{\lambda}{F(\varphi)}.$$

Daraus folgt nun

$$\varrho u = \frac{A\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}}\lambda$$

und weil

$$\frac{A\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}}$$

der Halbmesser des Parallelkreises des Ellipsoides in der Breite φ ist, also

$$\frac{A\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}}\lambda$$

die Bogenlänge für die Meridiandifferenz λ, ϱu aber die zugehörige Bogenlänge auf der Karte, so folgt aus der letzten Gleichung, dass

1) Natürlich dürfen auch hier wieder Kegel und Kugel nicht zusammengedacht werden, da die beiden Parallelen des Kegels und der Kugel, welche gleiche Dimensionen haben, nicht denselben Abstand von einander haben.

auch die Bögen der Parallelkreise in wahrer Länge erscheinen; natürlich schneiden sich dann Meridiane und Parallelkreise der Karte nicht unter rechten Winkeln; es ist

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} = -\frac{A(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2 \sin \varphi^2)^{\frac{3}{2}}}; \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial \lambda} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{A(1-\varepsilon^2)\sin\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\lambda}{\varrho} + \frac{A^2 \cos\varphi\,(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^2}\,\frac{\lambda}{\varrho^2}$$

$$= -\frac{A(1-\varepsilon^2)\lambda}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \varrho}\left[\sin\varphi - \frac{A\cos\varphi}{\varrho\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}}\right];$$

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{A\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}} \cdot \frac{1}{\varrho}$$

somit

$$(65)\quad \begin{cases} k_m = \sqrt{1+\left[\sin\varphi - \dfrac{A\cos\varphi}{\varrho\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}}\right]^2 \lambda^2}; \quad k_p = 1 \\ \sin\Theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left[\sin\varphi - \dfrac{A\cos\varphi}{\varrho\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}}\right]^2\lambda^2}}; \\ \cos\Theta = \dfrac{\left(\sin\varphi - \dfrac{A\cos\varphi}{\varrho\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}}\right)\lambda}{\sqrt{1+\left[\sin\varphi - \dfrac{A\cos\varphi}{\varrho\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}}\right]^2\lambda^2}} \\ \cot\Theta = \left(\sin\varphi - \dfrac{A\cos\varphi}{\varrho\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}}\right)\lambda \text{ und } k_m = \operatorname{cosec}\Theta. \end{cases}$$

Der Ausdruck für k_m zeigt, dass die Masse längs der Meridiane der Karte nicht gleich sind denjenigen auf dem Ellipsoid; nur auf dem ersten Meridian wird dies der Fall sein; so lange aber λ klein ist, wird auch die Abweichung nur klein sein; für $\lambda = 0$, d. h. am ersten Meridian ist $\Theta = 90^0$; hier stehen folglich Meridiane und Parallelen auf einander senkrecht. Soll dies ebenfalls für den mittleren Parallel der Fall sein, so muss der Klammerausdruck für $\varphi = \beta$ verschwinden, d. h.

$$\sin\beta - \frac{A\cos\beta}{a\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\beta^2}} = 0,$$

woraus folgt

$$a = \frac{A\cot\beta}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\beta^2}}$$

d. h. der Halbmesser des mittleren Parallels ist gleich der Seite eines in der Breite desselben dem Ellipsoide umschriebenen Kegels.

Der Ausdruck für ds giebt:

$$s = A\int\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}\,d\varphi - A\,\frac{\varepsilon^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}}.$$

Das erste dieser Integrale lässt sich in geschlossener Form nicht darstellen; es ist ein elliptisches Integral zweiter Gattung nach der Bezeichnungsweise *Legendre's*; man ist daher gezwungen seine Zuflucht zu Reihenentwicklungen zu nehmen. Da die Abplattung sehr klein ist, so kann man für geringe Breitendifferenzen (also z. B. für 1^0) als Länge des Bogens, d. h. also als Länge des Meridiangrades in der mittleren Breite φ annehmen [1]):

$$l_\varphi = \frac{A(1-\varepsilon^2)}{\sqrt{(1-\varepsilon^2 \sin\varphi^2)^3}} \cdot \operatorname{arc} 1^0 = \frac{A(1-\varepsilon^2)}{\sqrt{(1-\varepsilon^2 \sin\varphi^2)^3}} \cdot 0{\cdot}0174533.$$

Man wird sich demnach vom Mittelpunkte der Karte aus, auf dem ersten Meridian nach jeder Seite die der Breite φ entsprechende Länge l_φ auftragen, indem man von Grad zu Grad fortschreitet. Den gemeinsamen Mittelpunkt der Parallelkreise erhält man, indem man den Wert

$$a = \frac{A \cot\beta}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin\beta^2}}$$

vom mittleren Parallel aufträgt. Hat man die durch die einzelnen Theilpunkte gehenden Kreise, welche die Bilder der Parallelkreise vorstellen, gezogen, so wird man auf jedem die Länge des Grades des Parallels also

$$l'_\varphi = \frac{A \cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin\varphi^2}} \cdot \operatorname{arc} 1^0 = \frac{A \cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin\varphi^2}} \cdot 0{\cdot}0174533$$

wiederholt auftragen. Durch Verbindung der zusammengehörigen Punkte erhält man die Meridiane, welche hier transcendente krumme Linien sind.

Zur leichteren Construktion kann man sich der Tafel 14 bedienen, welche die Werte von l_φ, l'_φ für den Halbmesser $A = 1$ enthält, wobei als Einheit der Äquatorgrad zu Grunde gelegt ist; man nimmt also aus den Tafeln die Werte

$$l_\varphi = \frac{1-\varepsilon^2}{\sqrt{(1-\varepsilon^2 \sin\varphi^2)^3}}; \quad l'_\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin\varphi^2}}.$$

Ausserdem enthält die Tafel den Wert von a in derselben Einheit, also

$$\frac{\cot\beta}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin\beta^2} \cdot \operatorname{arc} 1^0}$$

(wobei das Argument der Tafel φ statt β ist).

---

1) Genauer ist:

$$\varrho = a + A\left\{A_0(\beta-\varphi) - A_1 \cos(\beta+\varphi)\sin(\beta-\varphi) + A_2 \cos 2(\beta+\varphi)\sin 2(\beta-\varphi)\ldots\right\}$$

wenn

$$A_0 = 1 - \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 - \tfrac{3}{64}\varepsilon^4$$
$$A_1 = \tfrac{3}{4}\varepsilon^2 + \tfrac{3}{16}\varepsilon^4$$
$$A_2 = \tfrac{15}{128}\varepsilon^4,$$

s. z. B. *Helmert*, Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie I, p. 47.

Für die Kugel folgt[1]) hieraus:

$$\varrho = a + A(\beta - \varphi)$$
$$\delta = A \cot \beta$$
$$u = \frac{\cos \varphi \cdot \lambda}{\cot \beta + (\beta - \varphi)}.$$

In Fig. 56 ist ein Netz nach dieser Projektion für den Fall der Kugel für die mittlere Breite 45° gezeichnet. Hierbei kann man sich der Tafel 13 bedienen, die Columne ϱ giebt mit dem Argumente: „Breite des mittleren Parallels", dessen Halbmesser für die Karten,

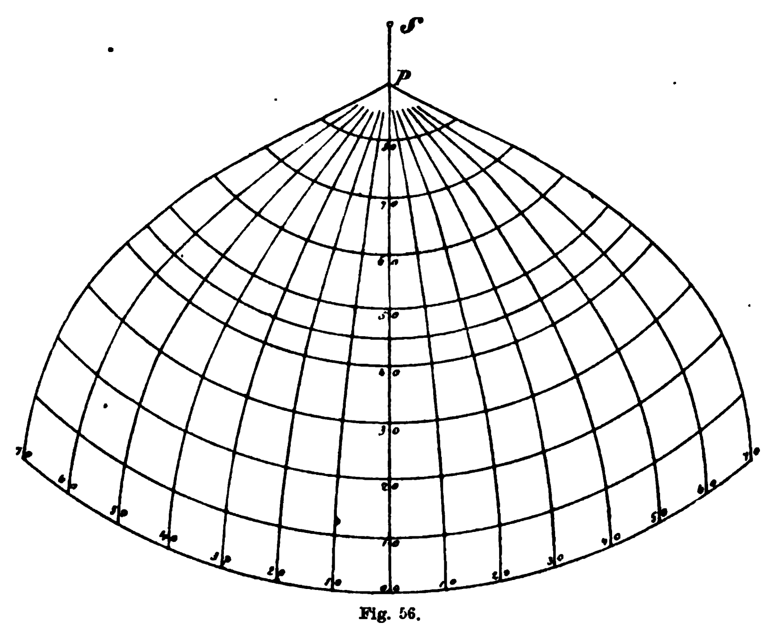


Fig. 56.

also den Mittelpunkt der sämmtlichen Parallelkreise der Karte; die Columne g_φ giebt den auf jedem Parallel aufzutragenden Abstand zweier Meridiane, wenn derjenige im Äquator (gleich dem Abstande der zu demselben Bogen gehörigen Parallelen) als Einheit angenommen wird. Natürlich darf der Pol nicht auf die Karte fallen, da in der Nähe des Poles die Meridiane entgegengesetzte Krümmung erhalten und je grösser die Längendifferenz des darzustellenden Theiles der Erdoberfläche, desto fühlbarer wird dieser Mangel.

Diese Projektion heisst fälschlich nach dem französischen Geographen *Rigobert Bonne*, der im Jahre 1752 zuerst ihre wesentlichen Vorzüge hervorhob[2]), *Bonne*'sche, manchmal auch *verbesserte*

1) Nach *Prony* (Connaissance des temps 1808 pag. 374) kann man ohne auf die Formeln für das Ellipsoid überzugehen an Stelle desselben eine Kugel setzen, deren Radius $\sqrt{r_1 r_2}$ ist, wenn r_1, r_2 die beiden Hauptkrümmungshalbmesser in dem Kartenmittelpunkte sind.

2) S. *Gretschel*, l. c. pag. 159.

Bonne'sche Projektion, auch *Projection du dépôt de la guerre* oder *Projection de la Carte de France*, weil sie für die 1832 angefertigte grosse Karte von Frankreich verwendet würde (s. *Puissant*, Notice sur la nouvelle carte de la France)[1]. Man könnte ihr aber mit demselben Rechte noch eine Menge Namen geben, denn sie wurde wol für Specialkarten in letzter Zeit am meisten verwendet, welcher Umstand sich aus ihrer verhältnismässig guten Brauchbarkeit[2]) erklärt. Ihre Haupteigenschaften sind: 1. Die auf dem *mittleren* (geradlinigen) Meridian und den Parallelkreisen gemessenen Längen werden nicht verändert. 2. Die Parallelkreise schneiden den Mittelmeridian, und die sämmtlichen krummlinigen Meridiane den mittleren Parallel, dessen Halbmesser gleich der Seite eines Kegels ist, der die Erdoberfläche im mittleren Parallel berührt, senkrecht. 3. Die Karte giebt in allen Punkten wahre Flächen, d. h. das Verhältnis zweier Flächentheile der Karte ist gleich demjenigen der durch sie dargestellten Theile der Erdoberfläche.

Nebst der 1832 angefertigten Karte von Frankreich ist die Verwendung dieser Projektionsmethode seit 1845 für die Spezialkarten der österreichischen Provinzen[3]) zu erwähnen; ferner für die Spezialkarte der Schweiz im Massstabe 1:100000 in 25 Blättern[4]); für die Spezialkarte von Schottland[5]), für eine Karte des Libanon[6]) u. s. w.

---

1) S. auch Mémorial du dépôt de la guerre de la France II. Bd. pag. 432. Mémoire sur la projection des cartes géographiques adoptée au dépôt de la guerre par *M. Henry*.

2) Die Vorzüge dieser Projektion sind von den Kartographen oft überschätzt worden, und ihre Güte ist durchaus nicht so ausserordentlich. Jedenfalls hat die von *Tissot* angegebene *compensative Projektion* (s. das letzte Kapitel § 46) wesentliche Vortheile vor derselben.

3) Siehe „Instruktionen für die bei der astronomisch-trigonometrischen Landesvermessung und im Civilbureau des k. k. militär-geographischen Institutes angestellten Individuen" 1845 pag. 184. *Frischauf* bemerkt im „Jahrbuch des österreichischen Touristenclubs" Bd. 12, pag. 5: „Nach diesen Angaben könnte man schliessen, dass das Netz für die alte Spezialkarte (im Masse 1 : 144000) nach der *Bonne*'schen Methode construiert wurde. Während des Druckes erfuhr ich, dass für das alte Kartennetz die *Cassini*'sche Projektion angewendet wurde. Es scheint jedoch im k. k. militär-geographischen Institute auch die *Bonne*'sche Construktion Verwendung gefunden zu haben." In der That war dies auch der Fall. Siehe „Organisation und Fortschritt der militärisch-cartographischen Arbeiten in Oesterreich, zusammengestellt von *Steinhauser* aus den Mittheilungen von *August v. Fligely*" 1859 pag. 10: „Die Gradnetze der Karte werden nach der von *Bonne* modificierten *Flamsteed*'schen Projektion berechnet und verzeichnet, wobei die Erdabplattung zu $\frac{1}{310}$, der Halbmesser des Äquators zu 3.362035 Wiener Klafter angenommen ist."

4) S. Proceedings of the Royal Geographical Society. London 1860 p. 243.

5) Account of the Methods and processes adopted for the production of the maps of the ordnance survey of the united kingdom v. *H. James* 1875 p. 29.

6) Rapport sur la carte du Liban par *C. Maunoir*. Im Bulletin de la Société de géografie de Paris. V Serie Bd. 4. Paris 1862 pag. 263.

D'Avezac [1]) identificiert diese Projektion mit der zweiten *Ptolemäischen* und nennt sie auch *homeotere Projektion des Ptolemäus*. Dies ist aber, wie aus dem folgenden ersichtlich, unrichtig. *Ptolemäus* nimmt als Mittelpunkt der Karte Syene, dessen Breite zu 23°50′ angenommen wird. Dann wird (Fig. 57) $MB = MB' = 90^0$, $MA = 23^0 50'$ angenommen und der durch B, A, B' gelegte Kreisbogen als Bild des Äquators angesehen. Wird der Meridiangrad als Einheit angenommen, so ist $MA = 23{\cdot}83$ Einheiten und die Entfernung MO des Mittelpunktes O des Kreisbogens BAB' von M gleich 157·79, daher $OA = 181{\cdot}62$. O ist dann der Mittelpunkt der äquidistanten Parallelkreise. *Ptolemäus* macht dann $AN = 16\frac{1}{2}$, $AT = 63$ und sieht den durch N gezogenen Kreis als den Antiparallel von Meroë, den durch T gezogenen als Parallel von Thule an. *Auf den Parallelkreisen von Thule, Syene und Meroë werden dann die ihnen nach der Natur zukommenden Längen* (cos der Breiten) *abgeschnitten, und durch die sich entsprechenden 3 Punkte Kreisbögen gezogen.*

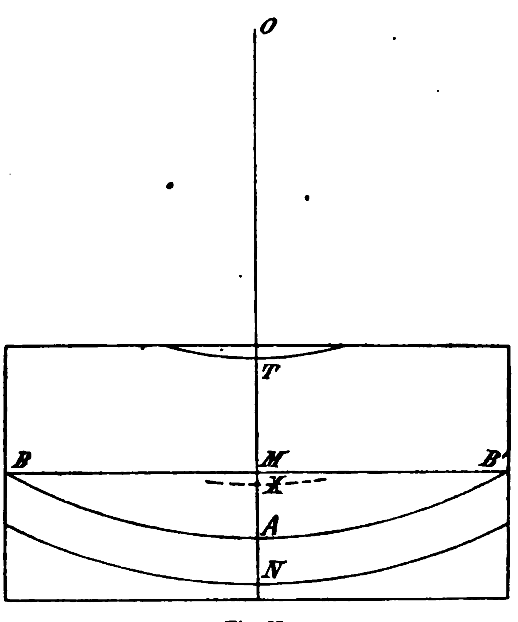


Fig. 57.

Ist $AX = 19^0 27' 35$, so ist $OX = 181{\cdot}65 - 19{\cdot}45 = 162{\cdot}20$, und da $\cot 19^0 27' 35 = 2{\cdot}83089$, also $\frac{\cot 19^0 27' 35}{\text{arc } 1^0} = 162{\cdot}20$, so ist die Projektion derart, dass der Radius des Parallels, dessen Breite gleich 19° 27′ 35 ist, gleich der Seite des die Kugel in diesem Parallel berührenden Kegels ist. Der Unterschied von der eben behandelten sogenannten *Bonne*'schen Projektion ist aber ersichtlich.

Wilberg (s. dessen Ausgabe von *Ptolemäus* Geographie 1838 p. 87) bemerkt hierzu: Aptior hic Ptolemaei constructio esset, si omnium,

1) Er sagt (l. c. pag. 351): „Die *Sanson*'sche Projektion wurde von *Flamsteed* als eine von ihm entdeckte, neue angesehen; aber, was alle Glaublichkeit übersteigt, ist, dass derselbe Name (der *Flamsteed*'schen, mit dem Beinamen der modificierten) durch eine nicht zu entschuldigende Verirrung für eine Projektion von ganz anderem Charakter, welche *wenigstens* 15 *Jahrhunderte älter ist*, nochmals auftreten konnte.

quos scripturus erat parallelorum longitudinem eodem quo trium illorum modo definisset, atque per segmentorum sibi respondentium incisiones uno tracto continuas curvas duxisset, quae meridianos repraesentarent. Quod si fecisset, constructio eius maximam haberet similitudinem cum illa, cuius modum Bonnius docuit. Dass diese sog. *Bonne*'sche Projektion mit der *Ptolemäi*schen nicht identisch ist, sagt auch *Germain* in seinem traité des projections des cartes géographiques pag. 98. Doch findet sich (pag. 194) ein anderer Irrthum, indem behauptet wird, dass die wahren Längen (cos der Breite) auf dem Antiparallel von Meroë, dem Äquator, dem Parallel von Syene und dem von Thule aufgetragen, und die Schnittpunkte durch mechanische Curven verbunden werden. Den Unterschied von der sog. *Bonne*'schen sieht *Germain* darin, „que la seconde projection de Ptolémée n'est pas le développement du cône, tangent au parallèle de Syene. . . . Il faut donc reconnaître que Ptolémée n'avait pas l'idée d'un cône tangent à la terre le long du parallèle moyen, et que sa construction est tout arbitraire. Wenn auch das letztere der Fall wäre, so wäre die Natur der Projektion doch dieselbe, wie die der sog. *Bonne*'schen, indem nur der Hauptpunkt der Karte 19°27′35 Breite hätte, und die Karte weiter nach Norden als nach Süden fortgesetzt wäre, wenn nicht der Unterschied im Ziehen der Meridiane liegen würde.

Wenn hiernach auch diese Projektion nicht 15 Jahrhunderte alt ist, wie dies *D'Avezac* behauptet, so ist sie darum doch nicht neu; sie rührt von *Mercator* her, und wir wollen sie *Mercator*'sche äquivalente Projektion nennen. In seinem „Atlas sive Cosmographicae meditationes de fabrica mundi et fabricati figura", 1595, sind die Karten 3 (Afrika) und 4 (Asien) in dieser Projektion dargestellt. Ebenso ist die Weltkarte in der 1584 erschienenen Ausgabe der Geographie des *Ptolemäus*[1]) statt in des letzteren Projektion, in derselben äquivalenten (fälschlich *Bonne*'schen genannten) Projektion dargestellt, und sind zu derselben die folgenden erläuternden Worte hinzugesetzt: In hac tabula parallelorum non unius alteriusve (ut sufficere dicit *Ptolemaeus*) sed omnium plane symmetriam ad circulum maximum servavi, quo sphaericae dispositionis formam quadranguli quam proxime repraesentarent et debita longitudinis ad latitudinem proportio in regionibus servaretur.

Anmerkung. Es erübrigt noch mit einigen Worten der *Wiechel*'schen äquivalenten Zenitalprojektion zu gedenken. Bei der Polarprojektion, aus welcher die zenitale entsteht, wenn der Pol durch einen anderen Punkt der Erdoberfläche ersetzt wird, und die Netzlinien (Meridiane und Parallelen) der Polarprojektion die Bedeutung von Höhenkreisen und Almucantaracs erhalten, entstehen die Parallelkreise, indem man durch die Theilpunkte *a*, *b* . . . des kreis-

1) Geographiae libri octo. Recogniti iam et diligenter emendati cum tabulis geographicis ad mentem auctoris restitutis ac emendatis per *Gerardum Mercatorem*.

förmigen ersten Meridians $mbaP$ aus dem Pole als Mittelpunkt Kreise zieht, woraus man erkennt, dass die Parallelkreise *identisch* sind mit *Lamberts* äquivalenter Polarprojektion (der sogenannten *isomeren*), da jeder Parallelkreis mit der zugehörigen Sehne als Halbmesser beschrieben wird, was *Wiechel* vollständig übersieht. Theilt man den durch den Mittelpunkt C (Fig. 58) gehenden Parallelkreis in gleiche Theile, und beschreibt aus den Theilpunkten als Mittelpunkten Kreisbögen nach einer Seite, so stellen diese die Meridiane vor. An Stelle der von *Lambert* verwendeten geradlinigen Meridiane Pm, Pn treten also die Kreisbögen Pbm, Pcn; da aber

$$\text{area } PCmb = PC'nc,$$

so ist

$$\text{area } PCmnC' = PCmnC' + Pnc - Pmb = \text{area } Pbmnc,$$

und dasselbe gilt von jedem zwischen zwei Parallelkreisen und Meridianen liegenden Streifen, womit die Äquivalenz bewiesen ist. An diese „elegante" Projektion, welche sich auch vorzüglich als „Muster auf der ersten Stufe des Zeichenunterrichtes eignet", knüpft *Wiechel* die Hoffnung, dass sie bald in der Praxis Eingang finden wird [1]) und giebt zum Beweise ihrer Güte eine tabellarische Zusammenstellung, welche *S. Günther* trotz ihrer Mangelhaftigkeit und Haltlosigkeit in *Behm's* geographischem Jahrbuch Bd. 9, unverändert abdruckt. [2]) Zunächst nimmt *Wiechel* keine Rücksicht auf den Winkel der Netzcurven; jeder Eigenschaft wird ein gewisses Gewicht beigelegt; und zwar 1. Äquivalenz 2, 2. Conformität 2, 3. wenn die Hauptcoordinate in wahrer Länge erscheint 1, 4. die Nebencoordinate 1, 5. wenn die Netzlinien Gerade oder Kreisbögen sind 1, 6. wenn das Bild zusammenhängend ist (nicht durch Lücken getrennt, wie z. B. bei den Sternprojektionen oder durch das Nichtaneinanderstossen benachbarter Theile bei den Kegelprojektionen) 1; für die *Lambert*'sche und *Wiechel*'sche lautet das Bild:

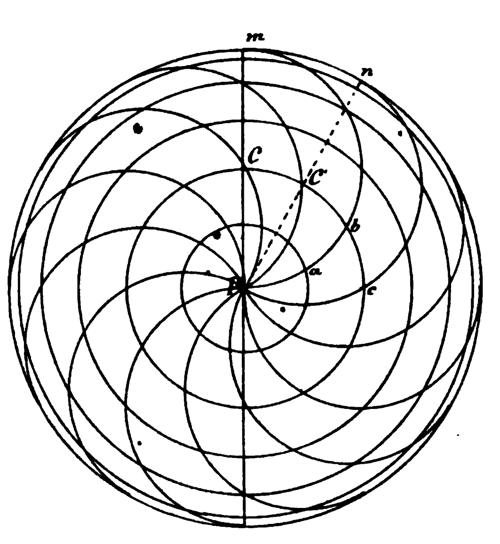


Fig. 58.

nach *Wiechel*

	1	3	4	5	6	Summe
Lambert	2	—	—	1	1	4
Wiechel	2	1	1	1	1	6

richtiger jedoch

	1	3	4	5	6	7	Summe
Lambert	2	—	—	1	1	1	5
Wiechel	2	1	—	1	1	—	5

wobei in eine 7. Colonne das Gewicht 1 oder 0 eingetragen ist, je nachdem die Netzlinien aufeinander senkrecht stehen oder nicht.

1) *Wiechel*, Rationelle Gradnetzprojektionen. Der Civilingenieur 1879, p. 410.

2) Nur aus diesem Grunde wurde auf diese sonst ganz wertlose Zusammenstellung hier näher eingegangen.

Wie wertlos jedoch diese Zusammenstellung ist, ergiebt sich z. B. aus der Vergleichung der *Mercator*'schen Seekartenprojektion und der zuletzt behandelten *Mercator*'schen äquivalenten (*Bonne*'schen) Projektion. Für diese hat man:

	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Mercators Seekartenproj.	—	2	—	—	1	1	1	5
Mercators äquivalente Pr.	2	—	—	1	—	—	—	3

und doch wurde gerade die zweite Projektion ihrer Güte halber bei einer grossen Zahl von Karten gewählt, während die erste nur eine ganz spezielle Verwendung für Seekarten hat.[1])

Eine Vergleichung der stereographischen und *Mercator*'schen äquivalenten Projektion giebt *Oskar Möllinger* in seinem „Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojektionen" pag. 104 ff.

Für das Kartennetz von Europa ist als mittlerer Parallel derjenige, dessen Breite + 52° ist angenommen. Als erster Meridian ist derjenige gewählt, dessen östliche Länge von Paris 20° ist (s. l. c. pag. 55). Als Grenzkreis der Karte wird ein Kreis genommen, dessen sphärischer Halbmesser 28° ist. Für die Karte von Deutschland ist die Breite des mittleren Parallels + 50°, der Meridian des Kartenmittelpunktes 10° östlich von Paris, Grenzkreis vom sphärischen Halbmesser 8°, (pag. 60). Zur Prüfung wurden 4 Punkte gewählt (für die Karte von Europa: Constantinopel, Petersburg, Reikiavik, Lissabon, von denen die beiden ersten in der Nähe des Hauptmeridians, die beiden letzten nahe an den Rand der Karte fallen; für die Karte von Deutschland: Berlin, Triest, Turin, Paris, in derselben Lage gegen den ersten Meridian) und aus den geographischen Coordinaten ihre sphärische Distanz, ihre rechtwinkligen Coordinaten in den beiden Projektionen, und aus letzteren ihre geradlinigen Entfernungen auf den Karten bestimmt. Die Vergleichung ergiebt pag. 109 und 113:

Entfernung	Sphärische Distanz in Meilen	Stereogr. Projekt.	Merc. äquivalente Projekt.	Stereogr. — Original	Merc. — Original	Merc. — stereogr.
Lissabon—Constant.	436·887	436·435	434·509	— 0·452	— 2·378	— 1·926
Constant.—Petersb.	284·325	279·817	284·335	— 4·508	+ 0·010	+ 4·518
Petersb.—Reikiavik	362·371	362·574	362·699	+ 0·203	+ 0·328	+ 0·125
Reikiavik—Lissabon	398·250	406·370	397·232	+ 8·120	— 1·018	— 9·138
Lissabon—Petersb.	488·033	485·117	483·968	— 2·916	— 4·065	— 1·149
Constant.—Reikiavik	556·442	552·408	551·342	— 4·034	— 5·100	— 1·066
Paris—Turin	78·8267	78.8839	78·9701	+ 0·0572	+ 0·1434	+ 0·0862
Turin—Triest	64·6667	64·6732	64·6511	+ 0·0065	— 0·0156	— 0·0221
Triest—Berlin	102·9292	102·8101	102·9284	— 0·1191	— 0·0008	+ 0·1183
Berlin—Paris	118·4000	118·3232	118·3973	— 0·0768	— 0·0027	+ 0·0741
Paris—Triest	125·8104	125·7802	125·8645	— 0·0302	+ 0·0541	+ 0·0843
Turin—Berlin	124·8696	124·7428	124·8181	— 0·1268	— 0·0517	+ 0·0753

Als Resultat dieser Vergleichungen zieht *Möllinger* den Schluss, dass „für Karten, welche kleinere Kugelabschnitte, wie Deutschland, Frankreich, die Schweiz etc., darstellen sollen, die stereographische Projektionsmethode an

1) Noch sonderbarer tritt dies in der Vergleichung mit der *Tissot*'schen compensativen Projektion auf, welche höchstens das Gewicht 1 in der Columne 6 hätte; das Resultat wäre also, dass diese vorzügliche Projektion zu verwerfen wäre, weil sie nur das Gewicht 1 hätte!

Stelle der *Bonne*'schen (eigentlich *Mercator*'schen äquivalenten) zur Anwendung kommen kann, indem die aus einer solchen Karte entnommenen Distanzen nicht mit wesentlich grösseren Fehlern behaftet sind, als dies bei der *Bonne*'schen Methode der Fall ist" (pag. 117). Aber der dadurch erlangte Vortheil ist nur ein scheinbarer; denn bei grösseren Karten kann man die in der stereographischen Projektion sich als Kreise projicierenden Netzlinien, keinesfalls als solche zeichnen, indem die Mittelpunkte ausserhalb der Zeichnungsfläche liegen und die Halbmesser viel zu gross sind. Ob man aber die Kreise der stereographischen oder die Netzlinien der *Mercator*'schen äquivalenten Projektion durch Coordinaten ihrer Punkte zeichnet, kömmt wol auf dasselbe hinaus.

IV. KAPITEL.

ALLGEMEINE THEORIE. CONFORME ABBILDUNG.

---

42. Die bisher erwähnten Projektionen waren: 1. Perspektivische, welche hauptsächlich dort zur Verwendung kommen, wo es sich um die Darstellung des Bildes der Erdoberfläche (der Himmelskugel oder einzelner Himmelskörper) handelt, wie sie einem in irgend einem Punkte befindlichen Auge erscheinen, oder wo gewisse spezielle Eigenschaften (z. B. der gnomonischen, dass die Bilder der grössten Kugelkreise gerade Linien sind; oder der stereographischen, dass alle grössten und kleinen Kugelkreise sich als Kreise darstellen) sie für gewisse Darstellungen besonders geeignet erscheinen lassen. 2. Kegelprojektionen, welche eine genauere Darstellung der gegenseitigen Lage der Theile der Erdoberfläche ermöglichen, indem sich der Kegel wenigstens nach einer Richtung der Kugel näher anschmiegt als die Ebene, und die auf den Kegel projicierte Oberfläche sich dann in eine Ebene ausbreiten lässt, nachdem sein Mantel längs einer Kante aufgeschnitten wurde. 3. Äquivalente Abbildungen, bei denen eine wichtige Bedingung, diejenige der Flächengleichheit der Elemente, folglich auch der Gleichheit der Verhältnisse endlicher Flächentheile mit denjenigen ihrer Bilder erfüllt wurde, bei denen überdies durch richtige Wahl der in die Gleichungen eintretenden Constanten die Erfüllung einiger weiterer, für eine gute Karte wichtiger Bedingungen ermöglicht war. Es war aber gezeigt, dass überall, namentlich in Punkten, welche vom Kartenmittelpunkte, der als Hauptpunkt zu gelten hat, weiter entfernt sind, bedeutende Verzerrungen eintreten, welche daher rühren, dass das Vergrösserungsverhältnis nicht nur in verschiedenen Punkten, sondern auch in einem und demselben Punkte nach verschiedenen Richtungen verschieden ist, und der Winkel der Projektionen zweier Curven nicht gleich ist demjenigen, welchen die Originale auf der Kugel einschliessen. Wir haben aber bereits einige Fälle kennen gelernt, wo wenigstens in einem und demselben Punkte das Vergrösserungsverhältnis nach allen Richtungen dasselbe ist, und wo *gleichzeitig* die Winkel in der Projektion unverändert dargestellt wurden, also gleich jenen auf der Kugel waren. Es könnte demnach

die Frage auftreten, ob es denn nicht möglich wäre, die obigen drei Bedingungen (1. Constanz der Vergrösserungsverhältnisse in einem Punkte nach allen Richtungen; 2. Constanz desselben in allen Punkten und 3. Unveränderlichkeit der Winkel) gleichzeitig zu erfüllen, und wenn dieses nicht der Fall ist, welche von denselben gleichzeitig erfüllbar sind. Gehen wir von der Voraussetzung aus, dass das Vergrösserungsverhältnis von der Richtung unabhängig ist, dann wird in zwei einander entsprechenden Richtungen ab, a_1b_1 und ac, a_1c_1 (Fig. 59) das Vergrösserungsverhältnis dasselbe (eigentlich um eine unendlich kleine, also verschwindende Grösse verschieden) sein; d. h. es ist

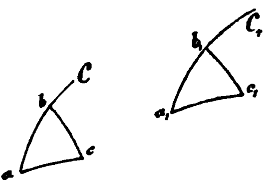


Fig. 59.

$$ab : a_1b_1 = ac : a_1c_1,$$

oder

$$ab : ac = a_1b_1 : a_1c_1.$$

Nachdem aber auch in den Punkten b und c dasselbe stattfindet und die Punkte b, b_1, sowie c, c_1 einander entsprechen, also bc, b_1c_1 und ac, a_1c_1 einander entsprechende Linienelemente sind, so wird auch (bis auf unendlich kleine, verschwindende Grössen)

$$ca : c_1a_1 = cb : c_1b_1,$$

oder

$$ac : bc = a_1c_1 : b_1c_1,$$

demnach

$$ab : ac : bc = a_1b_1 : a_1c_1 : b_1c_1,$$

folglich sind die beiden unendlich kleinen Dreiecke abc, $a_1b_1c_1$ bis auf unendlich kleine Grössen 2. Ordnung einander ähnlich, daher die von den einander entsprechenden Richtungen eingeschlossenen Winkel einander gleich. Unabhängigkeit des Vergrösserungsverhältnisses von der Richtung und Gleichheit der zwischen entsprechenden Curven enthaltenen Winkel sind also *immer* gleichzeitig erfüllt, in welchem Falle die Bilder der unendlich kleinen Theile ähnlich sind[1]); solche Abbildungen nennt man *conforme*.

Allgemeine Untersuchungen über die Art und Weise der Zuordnung der Punkte der beiden Flächen, d. h. über die Form der

---

1) Damit ist durchaus keine Ähnlichkeit der endlichen Theile verbunden; denn schreitet man längs einer Curve C fort, so wird in zwei unendlich benachbarten Punkten a_1b_1 ihres Bildes C_1 das Vergrösserungsverhältnis nur um eine unendlich kleine (also verschwindende) Grösse verschieden sein, in einem, wenn auch noch so nahen, aber endlich davon entfernten Punkte, wird aber das Vergrösserungsverhältnis schon um eine endliche Grösse (dem Integral der unendlich kleinen Variation desselben) verschieden sein.

Abbildung, sind schon durchgeführt von *Lambert*[1]) und *Lagrange*[2]), die allgemeine Auflösung gab aber erst *Gauss* in seinen beiden berühmten Abhandlungen: „Disquisitiones generales circa superficies curvas" und „Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Theile einer gegebenen Fläche auf einer anderen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird."

Wir werden bei dieser im Folgenden dargelegten Theorie auch allgemeine Gesichtspunkte für die nichtconforme Darstellung der Flächen kennen lernen, wie sie geometrisch zuerst von *Tissot*[3]) und später analytisch von *Fiorini*[4]) auseinandergesetzt wurden, und welche geeignet sind, auf die in den ersten drei Kapiteln gelehrten Projektionsmethoden im Zusammenhange erst in klarerer Weise einen Überblick zu gewähren.

Sei die allgemeine Gleichung einer Fläche

$$f(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

so wird man von den drei Variabeln x, y, z zwei beliebig wählen können, und die dritte, z, bestimmt sich dann aus Gleichung (1). Zu jeder Wertecombination x, y gehört also, je nach der Art der Funktion f, ein Wert oder eine bestimmte Anzahl von Werten von z. Die Gesammtheit der durch die drei Coordinaten x, y, z bestimmten Punkte bilden dann die durch die Gleichung (1) dargestellte Fläche. Substituiert man aber in diese Gleichung für x und y zwei, vorläufig noch unbestimmte Funktionen von zwei neuen Variabeln u, v, setzt man also

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \end{aligned} \tag{2}$$

in die Gleichung (1), so wird diese eine Gleichung in z, u, v und es lässt sich z hieraus bestimmen; sei allgemein der hieraus folgende Wert von z:

$$z = \chi(u, v), \tag{2'}$$

wobei es allerdings vorkommen kann, und auch unter Umständen vorkommen wird, dass sich diese letzte Beziehung (2') algebraisch gar nicht wirklich ermitteln lässt, was aber für die analytische Entwicklung von keiner Bedeutung ist, so dass man sich stets denken kann, dass die drei Gleichungen (2), (2') die Gleichung (1) vollständig ersetzen. Denn zu einem gegebenen Wertepaare von x, y kann man sich (ohne Rücksicht auf algebraische Schwierigkeiten) die

1) Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung: III, pag. 151 ff.; dabei musste er seine Zuflucht zu unendlichen Reihen nehmen, s. pag. 158.

2) Nouveaux mémoires de l'Academie de Berlin 1774 und 1779.

3) Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques. Paris 1881.

4) Le projezioni delle carte geografiche. Bologna 1881.

zugehörigen Wertepaare von u, v aus (2) bestimmen, oder wenigstens bestimmt denken; diese Werte in (2′) eingesetzt, geben wieder den zu dem angenommenen Wertepaare x, y gehörigen Wert von z, welcher aber derselbe sein muss, wie der aus Gleichung (1) folgende, da die Gleichungen (2), (2′) die Gleichung (1) identisch erfüllen. Da nun x, y, z als Funktionen von u, v zu betrachten sind, so wird

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

Setzt man nun mit *Gauss*

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= a & \frac{\partial y}{\partial u} &= b & \frac{\partial z}{\partial u} &= c \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= a' & \frac{\partial y}{\partial v} &= b' & \frac{\partial z}{\partial v} &= c' \end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

so wird

$$dx = a\,du + a'dv$$
$$dy = b\,du + b'dv$$
$$dz = c\,du + c'dv,$$

und das Bogenelement

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (a^2 + b^2 + c^2)\,du^2$$
$$+ 2\,(aa' + bb' + cc')\,du\,dv + (a'^2 + b'^2 + c'^2)\,dv^2.$$

Setzt man also weiter:

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= e \\ aa' + bb' + cc' &= f \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= g \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

so wird

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2. \tag{5}$$

Für eine zweite Fläche sei nun

$$\left.\begin{aligned} X &= \Phi(U, V) \\ Y &= \Psi(U, V) \\ Z &= X(U, V) \end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial U} &= A & \frac{\partial Y}{\partial U} &= B & \frac{\partial Z}{\partial U} &= C \\ \frac{\partial X}{\partial V} &= A' & \frac{\partial Y}{\partial V} &= B' & \frac{\partial Z}{\partial V} &= C' \end{aligned}\right\} \tag{3a}$$

$$\left.\begin{aligned} A^2 + B^2 + C^2 &= E \\ AA' + BB' + CC' &= F \\ A'^2 + B'^2 + C'^2 &= G \end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

so ist

$$dS^2 = E\,dU^2 + 2F\,dU\,dV + G\,dV^2. \tag{5a}$$

Nimmt man nun im Allgemeinen an, dass

$$\left.\begin{aligned} U &= f_1(u, v) \\ V &= f_2(u, v) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

ist, so werden sich für gegebene Werte von u, v Werte für U, V bestimmen lassen, und es ist durch die Gleichungen (6) eine gesetzmässige Zuordnung der Punkte der beiden Flächen angenommen. Denn für eine gewisse Annahme für u, v folgen aus (6) die Werte von U, V; dem Systeme u, v entspricht aber gemäss (2), (2′) ein Punkt x, y, z der Fläche I, dem Systeme U, V gemäss (2a) ein Punkt X, Y, Z der Fläche II, und diese beiden Punkte (x, y, z), (X, Y, Z), welche zu demselben Werte von u, v gehören, kann man als zugeordnete Punkte betrachten, und man sagt, der eine (gleichgiltig übrigens welcher) sei das Bild des anderen.[1]) Geht man von einem Wertepaare u, v zu einem anderen $u + du$, $v + dv$ über, so wird man offenbar auf der Fläche I zu einem benachbarten Punkte fortschreiten; ebenso auf der Fläche II; da aber die benachbarten Punkte der beiden Flächen ebenfalls zu demselben Wertepaare $u + du$, $v + dv$ gehören, so sind die Punkte $(x + dx, y + dy, z + dz)$ und $(X + dX, Y + dY, Z + dZ)$ ebenfalls zusammengehörige Punkte, demnach auch von den Linienelementen ds und dS das eine das Bild des anderen. Dieselben werden nicht gleich sein, und das Verhältnis $k = \frac{dS}{ds}$ der beiden Elemente drückt sich durch

$$\left(\frac{dS}{ds}\right)^2 = k^2 = \frac{E dU^2 + 2F dU dV + G dV^2}{e du^2 + 2f du dv + g dv^2}$$

aus. Dieses kann man auch schreiben

$$k^2 = \left(\frac{dU}{du}\right)^2 \frac{E + 2F\frac{dV}{dU} + G\left(\frac{dV}{dU}\right)^2}{e + 2f\frac{dv}{du} + g\left(\frac{dv}{du}\right)^2}, \tag{7}$$

woraus man sieht, dass dieses sogenannte *Vergrösserungsverhältnis* von den Verhältnissen $\frac{dV}{dU}$, $\frac{dv}{du}$ abhängt. Um aber die Bedeutung dieser letzteren zu erkennen, wollen wir die Bedeutung der Grössen u, v, U, V näher ins Auge fassen.

---

1) Es darf nicht unerwähnt bleiben, dass allgemein einem Punkte (x, y, z) mehrere (etwa m) Punkte (Y, Y, Z) entsprechen können, wenn die Auflösung der Gleichungen (2) oder (6) oder (2a) mehrere Wurzeln liefert. Umgekehrt könnten gleichzeitig einem Punkte (X, Y, Z) etwa n Punkte (x, y, z) entsprechen. Von dieser allgemeinen m-n-deutigen Verwandtschaft soll hier abgesehen und nur der Fall der ein-eindeutigen Verwandtschaft betrachtet werden, wo jedem Punkte der einen Fläche nur ein Punkt der anderen Fläche entspricht.

Setzt man u gleich einer Constanten c, so wird

$$x = \varphi(c, v); \quad y = \psi(c, v); \quad z = \chi(c, v);$$

legt man jetzt dem v verschiedene Werte bei, so erhält man eine Reihe zusammengehöriger Wertepaare von x, y, z, deren Gesammtheit demnach eine Linie bilden wird, und da die Werte von x, y, z der Gleichung der Fläche genügen, was immer auch u, v seien, oder anders ausgesprochen, weil alle Wertecombinationen von x, y, z, welche aus den drei Gleichungen (2), (2′) erhalten werden, Punkte auf der Fläche darstellen, so werden auch die durch Variation des Wertes von v bei constantem Werte $u = c$ erhaltenen Punkte auf der Fläche liegen. Daher stellt die Gleichung $u = c$ eine Linie auf der krummen Fläche vor. Legt man der Variabeln u einen anderen constanten Wert $u = c_1$ bei, so wird auch diese Gleichung eine Curve auf der Fläche darstellen. Die Gesammtheit der Gleichungen $u = c$, wenn c verschiedene constante Werte erhält, stellt also eine Schaar von Linien auf der Fläche vor.[1]) Desgleichen wird die Gleichung $v = c$ eine andere krumme Linie auf der Fläche vorstellen, und die Gesammtheit dieser Gleichungen für verschiedene Constanten c eine andere Schaar krummer Linien, so dass also die Coordinaten u, v eigentlich zwei Schaaren von Curven auf der Fläche darstellen. Legt man dem u, v je einen constanten Wert bei, so wird dadurch ein Punkt der Fläche (nämlich der Durchschnittspunkt dieser beiden Curven) erhalten.[2]) Ist nun u, v ein Punkt der krummen Fläche,

1) Es muss erwähnt werden, dass sich zwei Curven, für welche $u = c$ und $u = c_1$ ist, für die hier gemachten Voraussetzungen *nicht schneiden* können. Denn wenn dies der Fall wäre, so müsste für den Schnittpunkt $u = c$ und $u = c_1$ sein, d. h. es müssten sich für eine und dieselbe Wertecombination von x, y, z aus (2) und (2a) zwei Werte von u, nämlich $u = c$ und $u = c_1$ ergeben, was gegen die Voraussetzung ist.

2) Um dieses anschaulich zu machen, nehmen wir ein Rotationsellipsoid, dessen Gleichung

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{1 - \varepsilon^2} = A^2.$$

Setzt man

$$x = \frac{A \cos u \cos v}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin v^2}}; \quad y = \frac{A \sin u \cos v}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin v^2}}$$

in die Gleichung ein, so wird

$$z = \frac{A(1 - \varepsilon^2) \sin v}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin v^2}}.$$

Wenn $v = c$, so ist auch z constant, d. h. $v = c$ stellt einen Parallelkreis vor, und die Schaar der v-Linien ist die Schaar der Parallelkreise. Für $u = c$ wird $\frac{x}{y}$ constant; $\frac{x}{y} = \alpha$ giebt aber im Vereine mit der Gleichung des Ellipsoides einen Meridianschnitt, daher stellt $u = c$ einen Meridian vor und die Schaar der u-Linien ist die Schaar der Meridiane. Durch die Annahme $u = \alpha$, $v = \beta$ ist je ein Meridian und ein Parallelkreis, also ihr Durchschnittspunkt als Punkt der Fläche bestimmt.

$u + du$, $v + dv$ ein anderer, unendlich benachbarter, so wird $\frac{dv}{du}$ die *Richtung des Fortschreitens* von einem Punkte zum anderen, bezogen auf die u- und v-Linien, charakterisieren.

43. Nehmen wir vorerst $u = U$, $v = V$, d. h. drücken wir die Coordinaten x, y, z, X, Y, Z der beiden Flächen durch dieselben Variabeln u, v aus; dann ist für die beiden Flächen:

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= edu^2 + 2f\,dudv + g\,dv^2 \\ dS^2 &= Edu^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2 \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Denken wir uns auf der Fläche I zwei unendlich benachbarte u-Linien für die Werte u_1 und $u_1 + du$ gezogen; ebenso zwei unendlich benachbarte v-Linien für die Werte v_1 und $v_1 + dv$; die Linien für $u = u_1$, $v = v_1$ schneiden sich (Fig. 60) in einem Punkte a, die beiden unendlich benachbarten für die Werte $u_1 + du$, $v_1 + dv$ schneiden sich in c. Die u- und v-Linie in a schliessen einen Winkel ϑ ein, und dieser werde durch die Linie ac, welche auf dieser unendlich kleinen Strecke ebenso wie ab, bc als geradlinig anzusehen ist, in zwei Theile ω_1, ω_2 getheilt.

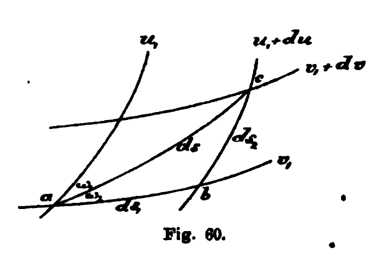


Fig. 60.

Das Linienelement ab der v-Linie wird erhalten, indem man $dv = 0$ setzt, weil ja für diese Linie $v = v_1$ constant ist; ebenso ist für bc $du = 0$ zu setzen, weil ja u constant ist (nämlich einen constanten Wert $u_1 + du$ hat, der aber von dem Werte u_1 nur unendlich wenig verschieden ist). Es ist also:

$$\begin{aligned} ab &= ds_1 = \sqrt{e}\,du \\ bc &= ds_2 = \sqrt{g}\,dv \end{aligned} \tag{8a}$$

und aus dem Dreiecke abc, in welchem $ac = ds$ ist (wenn u *und* v variabel sind)

$$ac^2 = ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + 2ds_1 ds_2 \cos\vartheta$$

und dieser Wert muss gleich dem früher angegebenen

$$ds^2 = edu^2 + 2f\,dudv + g\,dv^2 = ds_1^2 + \frac{2f}{\sqrt{eg}}\,ds_1 ds_2 + ds_2^2,$$

sein, woraus folgt:

$$\cos\vartheta = \frac{f}{\sqrt{eg}}; \quad \sin\vartheta = \frac{\sqrt{eg - f^2}}{\sqrt{eg}}. \tag{9}$$

Da ferner aus dem Dreiecke abc

$$ds_1 = ds\,\frac{\sin\omega_1}{\sin\vartheta}; \quad ds_2 = ds\,\frac{\sin\omega_2}{\sin\vartheta}$$

folgt, so findet man noch

$$\left(\frac{\sin\omega_1}{\sin\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\sin\omega_2}{\sin\vartheta}\right)^2 + 2\left(\frac{\sin\omega_1}{\sin\vartheta}\right)\left(\frac{\sin\omega_2}{\sin\vartheta}\right)\cos\vartheta = 1,$$

also

$$\sin\omega_1^2 + \sin\omega_2^2 + 2\sin\omega_1\sin\omega_2\cos\vartheta = \sin\vartheta^2. \tag{10}$$

Haben Θ, Ω_1, Ω_2 dieselbe Bedeutung für die Fläche II, für welche die Werte von E, F, G gelten, so hat man auch für diese ganz analoge Beziehungen aufzustellen.

Da für die Darstellung der beiden Flächen dieselben Variabeln u, v gewählt wurden, so wird (für einen bestimmten Wert von $u = u_1$) einer u-Linie der einen Fläche eine u-Linie der anderen Fläche und ebenso (für einen bestimmten Wert $v = v_1$) einer v-Linie der einen Fläche eine v-Linie der anderen Fläche entsprechen. Aber die Schaaren der u- und v-Linien werden auf der einen Fläche ganz anderer Natur sein können, als auf der anderen, und sich auch in correspondierenden Punkten (welche denselben Werten von u, v entsprechen) nicht unter denselben Winkeln schneiden, da die e, f, g und E, F, G im allgemeinen nicht dieselben sein werden. Auch die einander entsprechenden Linienelemente sind nicht gleich, und es ist

$$k^2 = \left(\frac{dS}{ds}\right)^2 = \frac{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}{edu^2 + 2fdudv + gdv^2}$$

die Linearvergrösserung, und

$$K = \frac{dS_1 dS_2 \sin\Theta}{ds_1 ds_2 \sin\vartheta} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{eg - f^2}} \tag{11}$$

die Flächenvergrösserung. Nun kann man auch schreiben:

$$k^2 = \frac{\frac{E}{e}\,edu^2 + 2\,\frac{F}{f}\,fdudv + \frac{G}{g}\,gdv^2}{edu^2 + 2fdudv + gdv^2},$$

oder wegen

$$edu^2 = ds_1^2 = ds^2\,\frac{\sin\omega_1^2}{\sin\vartheta^2}$$

$$gdv^2 = ds_2^2 = ds^2\,\frac{\sin\omega_2^2}{\sin\vartheta^2}$$

$$fdudv = \frac{f}{\sqrt{eg}}\,ds_1 ds_2 = ds^2\cos\vartheta\,\frac{\sin\omega_1\sin\omega_2}{\sin\vartheta^2}$$

$$k^2 = \frac{\frac{E}{e}\sin\omega_1^2 + 2\,\frac{F}{f}\sin\omega_1\sin\omega_2\cos\vartheta + \frac{G}{g}\sin\omega_2^2}{\sin\omega_1^2 + 2\sin\omega_1\sin\omega_2\cos\vartheta + \sin\omega_2^2}$$

oder endlich wegen (10):

$$k^2 = \frac{1}{\sin\vartheta^2}\left[\frac{E}{e}\sin\omega_1^2 + 2\,\frac{F}{f}\sin\omega_1\sin\omega_2\cos\vartheta + \frac{G}{g}\sin\omega_2^2\right]. \tag{12}$$

Das Vergrösserungsverhältnis k wird also variieren: 1. mit dem Orte, weil e, f, g, E, F, G, ϑ Funktionen von u, v sind; 2. auch an demselben Orte mit der Richtung, indem k eine Funktion von ω_1 und ω_2 ist. Variiert man ω_1 und ω_2, so wird sich k verändern. In der Richtung der u-Linien ist es (da $\omega_1 = 0$ ist) $k' = \sqrt{\frac{G}{g}}$, in

der Richtung der v-Linien (weil $\omega_2 = 0$ ist) $k'' = \sqrt{\frac{E}{e}}$; und es wird ein Maximum und ein Minimum geben müssen. Dabei ist aber für *einen und denselben* Punkt $\omega_1 + \omega_2 = \vartheta$, als Winkel zwischen der u- und v-Linie in diesem Punkte constant, daher

$$d\omega_1 + d\omega_2 = 0,$$

oder

$$\frac{d\omega_2}{d\omega_1} = -1.$$

Für die Maxima oder Minima muss aber

$$2k\frac{\partial k}{\partial \omega_1}$$

$$= \frac{2\frac{E}{e}\sin\omega_1\cos\omega_1 + 2\frac{F}{f}(\sin\omega_2\cos\omega_1 - \cos\omega_2\sin\omega_1)\cos\vartheta - 2\frac{G}{g}\sin\omega_2\cos\omega_2}{\sin\vartheta^2} = 0$$

sein, und dieses findet statt, wenn

$$\frac{E}{e}\sin\omega_1\cos\omega_1 + \frac{F}{f}(\sin\omega_2\cos\omega_1 - \cos\omega_2\sin\omega_1)\cos\vartheta$$
$$-\frac{G}{g}\sin\omega_2\cos\omega_2 = 0, \tag{13}$$

oder

$$\frac{E}{e}\sin 2\omega_1 + 2\frac{F}{f}\sin(\omega_2 - \omega_1)\cos\vartheta - \frac{G}{g}\sin 2\omega_2 = 0 \quad (13\text{a})$$

ist; und aus dieser Gleichung in Verbindung mit

$$\omega_1 + \omega_2 = \vartheta$$

folgt

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg} 2\omega_1 &= \frac{\sin 2\vartheta\left(\frac{G}{g} - \frac{F}{f}\right)}{\frac{E}{e} - \frac{G}{g} + 2\cos\vartheta^2\left(\frac{G}{g} - \frac{F}{f}\right)} = \frac{2f\sqrt{eg - f^2}\left(\frac{G}{g} - \frac{F}{f}\right)}{eg\left(\frac{E}{e} - \frac{G}{g}\right) + 2f^2\left(\frac{G}{g} - \frac{F}{f}\right)} \\
\operatorname{tg} 2\omega_2 &= \frac{\sin 2\vartheta\left(\frac{E}{e} - \frac{F}{f}\right)}{\frac{G}{g} - \frac{E}{e} + 2\cos\vartheta^2\left(\frac{E}{e} - \frac{F}{f}\right)} = \frac{2f\sqrt{eg - f^2}\left(\frac{E}{e} - \frac{F}{f}\right)}{eg\left(\frac{G}{g} - \frac{E}{e}\right) + 2f^2\left(\frac{E}{e} - \frac{F}{f}\right)}
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

und ähnlich für $\operatorname{tg} 2\Omega_1$ und $\operatorname{tg} 2\Omega_2$, indem in den letzten Ausdrücken in (14) nur die kleinen und grossen Buchstaben miteinander vertauscht werden.

Da sich zu $\operatorname{tg} 2x = A$ zwei Werte von x ergeben, die um 90^0 von einander verschieden sind, so folgt daraus, dass es zwei aufeinander senkrecht stehende Richtungen giebt, in denen das Vergrösserungsverhältnis ein Maximum beziehungsweise ein Minimum sein wird.[1]) *Tissot* nennt diese beiden Richtungen *Hauptrichtungen*. (Wenn $\frac{E}{e} = \frac{F}{f} = \frac{G}{g}$, so werden diese Richtungen unbestimmt; es wird, wie wir später sehen werden, in der That für diesen Fall das Ver-

1) *Tissot*, l. c. pag. 13 und C. R. Bd. 49 pag. 673. *Fiorini* l. c. pag. 7.

grösserungsverhältnis nach allen Richtungen dasselbe sein. Wenn $f = 0$, $F = 0$, so fallen die Hauptrichtungen mit der angenommenen Schaar der u-, v-Linien zusammen; diese sind selbst die Hauptrichtungen.)

Um die Werte des Maximums und Minimums zu finden, hat man aus (12)

$$\left(\frac{E}{e} \sin \omega_1 + \frac{F}{f} \sin \omega_2 \cos \vartheta\right) \sin \omega_1 + \left(\frac{G}{g} \sin \omega_2 + \frac{F}{f} \sin \omega_1 \cos \vartheta\right) \sin \omega_2 = k^2 \sin \vartheta^2$$

und aus (13):

$$\left(\frac{E}{e} \sin \omega_1 + \frac{F}{f} \sin \omega_2 \cos \vartheta\right) \cos \omega_1 - \left(\frac{G}{g} \sin \omega_2 + \frac{F}{f} \sin \omega_1 \cos \vartheta\right) \cos \omega_2 = 0$$

Multipliciert man die erste mit $\cos \omega_2$ die zweite mit $\sin \omega_2$ und addiert, und berücksichtigt, dass

$$\sin \omega_1 \cos \omega_2 + \cos \omega_1 \sin \omega_2 = \sin \vartheta,$$

so wird

$$\frac{E}{e} \sin \omega_1 + \frac{F}{f} \sin \omega_2 \cos \vartheta = k^2 \sin \vartheta \cos \omega_2 = k^2 (\sin \omega_1 + \cos \vartheta \sin \omega_2).$$

Multipliciert man die erste mit $\cos \omega_1$, die zweite mit $- \sin \omega_1$ und addiert, so wird:

$$\frac{G}{g} \sin \omega_2 + \frac{F}{f} \sin \omega_1 \cos \vartheta = k^2 \sin \vartheta \cos \omega_1 = k^2 (\sin \omega_2 + \cos \vartheta \sin \omega_1).$$

Hieraus folgt:

$$\left(\frac{E}{e} - k^2\right) \sin \omega_1 = -\left(\frac{F}{f} - k^2\right) \sin \omega_2 \cos \vartheta$$

$$\left(\frac{G}{g} - k^2\right) \sin \omega_2 = -\left(\frac{F}{f} - k^2\right) \sin \omega_1 \cos \vartheta$$

und durch Multiplikation dieser beiden Gleichungen

$$\left(\frac{E}{e} - k^2\right)\left(\frac{G}{g} - k^2\right) = \left(\frac{F}{f} - k^2\right)^2 \cos \vartheta^2,$$

welche Gleichung die Werte von k^2 bestimmt, welche die Maximal- und Minimalvergrösserung sind. Da aber

$$\cos \vartheta^2 = \frac{f^2}{eg},$$

so folgt:

$$(ek^2 - E)(gk^2 - G) = (fk^2 - F)^2, \tag{15}$$

oder entwickelt:

$$k^4 (eg - f^2) - k^2 (Eg + eG - 2Ff) + (EG - F^2) = 0.$$

Bezeichnet man also die beiden Hauptwerte selbst mit k_1, k_2, so ist

$$\left.\begin{aligned} (k_1^2 + k_2^2)(eg - f^2) &= Eg + eG - 2Ff \\ k_1^2 k_2^2 (eg - f^2) &= EG - F^2 \end{aligned}\right\}. \tag{16}$$

Dividiert man diese Gleichungen durch eg, zieht aus der zweiten die Wurzel und führt die Grössen $\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$ ein, so wird

$$(k_1^2 + k_2^2)\sin\vartheta^2 = \frac{E}{e} + \frac{G}{g} - 2\sqrt{\frac{EG}{eg}} \cdot \frac{Ff}{\sqrt{EGeg}}$$
$$= \frac{E}{e} + \frac{G}{g} - 2\sqrt{\frac{EG}{eg}}\cos\vartheta\cos\Theta$$
$$k_1 k_2 \sin\vartheta = \sqrt{\frac{EG}{eg}}\sin\Theta.$$

Multipliciert man die zweite mit $\pm 2\sin\vartheta$ und addiert sie zur ersten, so ergiebt sich [1])

$$\left.\begin{aligned}(k_1 + k_2)^2\sin\vartheta^2 &= \frac{E}{e} + \frac{G}{g} - 2\sqrt{\frac{EG}{eg}}\cos(\vartheta + \Theta)\\ (k_1 - k_2)^2\sin\vartheta^2 &= \frac{E}{e} + \frac{G}{g} - 2\sqrt{\frac{EG}{eg}}\cos(\vartheta - \Theta)\end{aligned}\right\}. \tag{17}$$

Aus der zweiten der Gleichungen (16) folgt übrigens noch

$$K = k_1 k_2 = \sqrt{\frac{EG - F^2}{eg - f^2}}$$

also wieder die Gleichung (11).

Lässt man jetzt in den beiden Flächen die u-, v-Linien, mit den sich rechtwinklig schneidenden Linien der grössten und kleinsten Änderung zusammenfallen, so wird $\vartheta = \Theta = 90^0$, $f = F = 0$, daher.[2])

$$\left.\begin{aligned}&k_1 = \sqrt{\frac{E}{e}};\quad k_2 = \sqrt{\frac{G}{g}};\\ &k^2 = \frac{E}{e}\sin\omega_1^2 + \frac{G}{g}\sin\omega_2^2 = k_1^2\sin\omega_1^2 + k_2^2\sin\omega_2^2\end{aligned}\right\}. \tag{17a}$$

Da $\frac{1}{k}$ das Vergrösserungsverhältnis bei der Übertragung der zweiten Fläche auf die erste ist, so wird ganz analog

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k_1^2}\sin\Omega_1^2 + \frac{1}{k_2^2}\sin\Omega_2^2. \tag{17b}$$

Nun ist aber

$$\omega_1 + \omega_2 = 90^0;\quad \Omega_1 + \Omega_2 = 90^0,$$

folglich

$$k^2(\sin\omega_1^2 + \cos\omega_1^2) = k_1^2\sin\omega_1^2 + k_2^2\cos\omega_1^2,$$

woraus

$$\operatorname{tg}\omega_1 = \sqrt{\frac{k^2 - k_2^2}{k_1^2 - k^2}}$$

und ganz ähnlich

$$\operatorname{tg}\Omega_1 = \sqrt{\frac{k^2 - k_2^2}{k_1^2 - k^2}} \cdot \frac{k_1}{k_2} \tag{18}$$

---

1) *Tissot* l. c. pag. 22. *Fiorini* l. c. pag. 9.

2) Für $f = F = 0$ sind diese Werte k_1, k_2, bez. das Maximum und Minimum. Sind f und F nicht Null, so werden diese, vorhin mit k', k'' bezeichneten Werte die Vergrösserungen in den Richtungen der u-, v-Linien, aber *nicht* die Maxima und Minima.

folgt. Hieraus erhält man schliesslich

$$\frac{\operatorname{tg} \Omega_1}{\operatorname{tg} \omega_1} = \frac{k_1}{k_2}, \tag{19}$$

welche Gleichung die Richtungsänderung in einem gegebenen Punkte und in einer gegebenen Richtung bestimmt. Um für die Differenz der Richtungen selbst direkt einen Wert zu erhalten, hat man:

$$\operatorname{tg}(\omega_1 - \Omega_1) = \frac{\operatorname{tg}\omega_1 - \operatorname{tg}\Omega_1}{1 + \operatorname{tg}\omega_1 \operatorname{tg}\Omega_1} = \frac{\operatorname{tg}\omega_1\left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right)}{1 + \frac{k_1}{k_2}\operatorname{tg}\omega_1^2} = \frac{(k_2 - k_1)\operatorname{tg}\omega_1}{k_2 + k_1 \operatorname{tg}\omega_1^2}.$$

Der Maximalwert dieser Änderung findet sich aus

$$\frac{\partial(\omega_1 - \Omega_1)}{\partial \omega_1} = 0,$$

oder

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial \omega_1} = 1.$$

Da aber aus (19)

$$\frac{1}{\cos \Omega_1^2} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \omega_1} = \frac{k_1}{k_2} \frac{1}{\cos \omega_1^2},$$

folgt, so ist für diesen Maximalwert ω_1'

$$1 = \frac{k_1}{k_2} \frac{1 + \operatorname{tg}\omega_1'^2}{1 + \frac{k_1^2}{k_2^2}\operatorname{tg}\omega_1'^2} = \frac{k_1 k_2 (1 + \operatorname{tg}\omega_1'^2)}{k_2^2 + k_1^2 \operatorname{tg}\omega_1'^2}$$

$$\operatorname{tg}\omega_1' = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}. \tag{20}$$

Für den hieraus folgenden Wert von $\omega_1 = \omega_1'$ erhält man die Maximaländerung von $\omega_1 - \Omega_1$ aus

$$\operatorname{tg}(\omega_1 - \Omega_1) = \frac{k_2 - k_1}{2\sqrt{k_1 k_2}}$$

oder

$$\sin(\omega_1 - \Omega_1) = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}.$$

Die Maximaländerung des Winkels findet statt, wenn die beiden Schenkel desselben die Richtungen $+\omega_1'$ und $-\omega_1'$ haben; dann wird die Winkeländerung gleich der doppelten der eben erhaltenen Maximaländerung der Richtung. Nennt man also die in einem gegebenen Punkte bei einer gegebenen Abbildungsart stattfindende Maximaländerung des Winkels δ, so ist der erhaltene Maximalwert $\omega_1 - \Omega_1 = \frac{\delta}{2}$ und es folgt somit[1])

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{\delta}{2} &= \frac{k_2 - k_1}{2\sqrt{k_1 k_2}} \\ \sin\frac{\delta}{2} &= \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} \end{aligned}\right\}. \tag{20a}$$

Die Vergleichung dieser Resultate mit den früher durch spezielle Untersuchungen gefundenen, wird die völlige Übereinstimmung der-

1) *Tissot* l. c. pag. 16. *Fiorini* l. c. pag. 19. Siehe auch *Germain*, traîté des projections des cartes géographiques pag. 221.

selben erkennen lassen, zeigt aber auch die Umstände unter denen diese Formeln Anwendung finden können, und wie die § 32 gegebene Ableitung für den allgemeinen Fall weiter zu führen ist, um auch die Maximaländerungen δ zu erhalten.

Hat man in zwei auf einander senkrecht stehenden Richtungen die Vergrösserungen k', k''; so wird offenbar, wenn der Winkel der einen Richtung mit der einen Hauptrichtung ω_1 ist, derjenige der anderen $90 + \omega_1$ sein; also wird:

$$k'^2 = k_1^2 \sin \omega_1^2 + k_2^2 \cos \omega_1^2$$
$$k''^2 = k_1^2 \cos \omega_1^2 + k_2^2 \sin \omega_1^2$$

daher

$$k'^2 + k''^2 = k_1^2 + k_2^2. \qquad (21\,\mathrm{a})$$

Da ferner

$$\operatorname{tg} \Omega_1' = \frac{k_1}{k_2} \operatorname{tg} \omega_1; \quad \operatorname{tg} \Omega_1'' = -\frac{k_1}{k_2} \cot \omega_1,$$

so wird

$$\operatorname{tg} \Omega_1' \operatorname{tg} \Omega_1'' = -\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2. \qquad (21\,\mathrm{b})$$

Aus (17 b) folgt:

$$\frac{1}{k'^2} = \frac{1}{k_1^2} \sin \Omega_1'^2 + \frac{1}{k_2^2} \cos \Omega_1'^2 = \frac{1}{k_2^2} \cos \Omega_1'^2 \left(1 + \frac{k_2^2}{k_1^2} \operatorname{tg} \Omega_1'^2\right)$$
$$= \frac{1}{k_2^2} \cos \Omega_1'^2 (1 - \operatorname{tg} \Omega_1' \cot \Omega_1'')$$
$$\frac{1}{k''^2} = \frac{1}{k_1^2} \sin \Omega_1''^2 + \frac{1}{k_2^2} \cos \Omega_1''^2 = \frac{1}{k_1^2} \sin \Omega_1''^2 \left(1 + \frac{k_1^2}{k_2^2} \cot \Omega_1''^2\right)$$
$$= \frac{1}{k_1^2} \sin \Omega_1''^2 (1 - \operatorname{tg} \Omega_1' \cot \Omega_1''),$$

oder

$$\frac{1}{k'^2} = \frac{\sin (\Omega_1'' - \Omega_1')}{k_2^2} \frac{\cos \Omega_1'}{\sin \Omega_1''}$$
$$\frac{1}{k''^2} = \frac{\sin (\Omega_1'' - \Omega_1')^2}{k_1^2} \frac{\sin \Omega_1''}{\cos \Omega_1'}$$

folglich, wenn man die letzten beiden Gleichungen miteinander multipliziert

$$\frac{1}{k'^2 k''^2} = \frac{\sin (\Omega_1'' - \Omega_1')^2}{k_1^2 k_2^2}$$
$$k' k'' \sin (\Omega_1'' - \Omega_1') = k_1 k_2.$$

Nun ist $\Omega''_1 - \Omega'_1$ der Winkel, als welcher der rechte Winkel der Fläche I in der Fläche II abgebildet wird; nennt man die Änderung dieses rechten Winkels

$$90 - (\Omega_1'' - \Omega_1') = \delta',$$

so wird

$$\cos \delta' = \frac{k_1 k_2}{k' k''} \qquad (21\,\mathrm{c})$$

eine bereits früher wiederholt verwendete Gleichung. Mit Rücksicht auf

$$k_1'^2 = k_1^2 \sin \omega^2 + k_2^2 \cos \omega^2$$
$$k_1''^2 = k_1^2 \cos \omega^2 + k_1^2 \sin \omega^2$$

wird:

$$\cos \delta'^2 = \frac{k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 \sin \omega^2 + k_2^2 \cos \omega^2)(k_1^2 \cos \omega^2 + k_2^2 \sin \omega^2)}$$

$$= \frac{4 k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 - k_2^2)^2 \sin 2\omega^2 + 4 k_1^2 k_2^2}$$

Das Maximum von δ' tritt ein, wenn $\cos \delta'$ ein Minimum wird, d. h. für $\sin 2\omega = 1$, $\omega = 45^0$; dann wird:

$$\cos \delta' = \frac{2 k_1 k_2}{k_1^2 + k_2^2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\delta'}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \delta'}{1 + \cos \delta'}} = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}. \tag{22}$$

Durch (22) ist die Maximaländerung δ' bestimmt, welche ein *rechter* Winkel erfahren kann; dieselbe tritt ein, wenn die beiden Schenkel unter je einem Winkel von 45^0 gegen die beiden Hauptrichtungen geneigt sind. (20a) giebt die Maximaländerung, welche ein Winkel *überhaupt* erreichen kann, für welche das Azimut ω_1 der Richtung gegen die Hauptrichtung k_2 durch (20) bestimmt ist.

Wenn $k_1 = k_2$, so wird auch $k = k_1 = k_2$, d. h. die Vergrösserung ist nach allen Richtungen dieselbe, wenn sie in den beiden Hauptrichtungen gleich ist; dann wird auch $\delta = 0$, $\delta' = 0$ und allgemein $\omega_1 - \Omega_1 = 0$, d. h. es sind dann auch die Winkel im Bilde gleich denen im Originale.

Der Wert von k^2 wird nun bald grösser, bald kleiner als 1 sein, je nachdem im Bilde eine Dilatation oder eine Contraction stattfindet; daher wird $k^2 - 1$ nach gewissen Richtungen positiv, nach anderen negativ ausfallen, und wenn man dessen Wert nach n Richtungen bestimmt, und die Summe durch n dividiert, also den Ausdruck

$$\frac{1}{n} \sum (k^2 - 1)$$

bildet, so wird dieser gewissermassen die *Gesammtänderung* des Bildes in dem betrachteten Punkte veranschaulichen, u. zw. um so genauer, je grösser man n wählt. Seien nun $\varphi, \varphi + \frac{1}{n} 2\pi,\ \varphi + \frac{2}{n} 2\pi,\ \varphi + \frac{n-1}{n} 2\pi$ die gewählten Richtungen, so wird nach einer derselben

$$k_\varrho^2 - 1 = k_1^2 \sin \left(\varphi + \frac{\varrho}{n} \cdot 2\pi\right)^2 + k_2^2 \cos \left(\varphi + \frac{\varrho}{n} 2\pi\right)^2 - 1.$$

Summiert man und berücksichtigt, dass[1])

$$\sum_0^{n-1} {}_\varrho \cos \left(\varphi + \frac{\varrho}{n} \cdot 2\pi\right)^2 = \frac{n}{2}$$

$$\sum_0^{n-1} {}_\varrho \sin \left(\varphi + \frac{\varrho}{n} 2\pi\right)^2 = \frac{n}{2},$$

1) S. z. B. *Herr*, Lehrbuch der höheren Mathematik I pag. 80.

so wird

$$\sum (k_\varrho^2 - 1) = \frac{n}{2} k_1^2 + \frac{n}{2} k_2^2 - n,$$

oder

$$\frac{1}{n} \sum (k_\varrho^2 - 1) = \tfrac{1}{2} [(k_1^2 - 1) + (k_2^2 - 1)].$$

Die in diesem Sinne genommene Gesammtänderung drückt sich also direkt durch die in den beiden Hauptrichtungen genommenen Vergrösserungen aus. Von diesen wird aber z. B. $k_1^2 - 1$ positiv, $k_2^2 - 1$ negativ sein können, und in der Summe hebt sich dieses dann zum Theil auf, obzwar die k_1 und k_2 wesentlich von einander verschieden sind. Es wird daher dieser Ausdruck kein richtiges Mass für die Gesammtänderung in dem betrachteten Punkte geben. Fasst man aber als Lineränderung in der einen Hauptrichtung $(k_1 - 1)$, in der anderen $(k_2 - 1)$ auf, und betrachtet als Gesammtänderung der Karte in diesem Punkte die Summe der stets positiven Quadrate dieser beiden Grössen, so wird man

$$(k_1 - 1)^2 + (k_2 - 1)^2$$

als die Gesammtänderung der Karte in diesem Punkte in der Ausdehnung des Flächenelementes $ds_1\, ds_2 \sin\vartheta = \sqrt{eg - f^2}\, du\, dv$ anzusehen haben, also die Gesammtänderung der Karte durch das über die ganze dargestellte Fläche ausgedehnte Doppelintegral

$$U = \iint [(k_1 - 1)^2 + (k_2 - 1)^2] \sqrt{eg - f^2}\, du\, dv$$

ausdrücken.[1])

44. Als Anwendung dieser allgemeinen Theorie betrachten wir zunächst die perspektivischen Projektionen. Stellt man sich nach Fig. 1 die Gleichung der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

durch u, v dar, so wird

$$\begin{array}{lll} x = r \cos u \sin v & a = -r \sin u \sin v & a' = +r \cos u \cos v \\ y = r \sin u \sin v & b = +r \cos u \sin v & b' = +r \sin u \cos v \\ z = r \cos v & c = 0 & c' = -r \sin v \\ & e = r^2 \sin v^2 & \\ & f = 0 & \\ & g = r^2 & \sqrt{eg - f^2} = r^2 \sin v. \end{array}$$

1) *Fiorini*, l. c. pag. 24 führt ausser dieser Formel noch als einen anderen Ausdruck der Gesammtänderung

$$V = \iint \left[(k_1 k_2 - 1)^2 + \left(\frac{k_1}{k_2} - 1\right)^2 \right] \sqrt{eg - f^2}\, dv\, du$$

an.

Für die Projektion ist:

$$X = \frac{Dr \sin v \sin u}{a + r \cos v} \qquad A = + \frac{Dr \sin v \cos u}{a + r \cos v} \qquad A' = Dr \frac{a \cos v + r}{(a + r \cos v)^2} \sin u$$

$$Y = -\frac{Dr \sin v \cos u}{a + r \cos v} \qquad B = -\frac{Dr \sin v \sin u}{a + r \cos v} \qquad B' = Dr \frac{a \cos v + r}{(a + r \cos v)^2} \cos u$$

$$Z = 0 \qquad C = 0 \qquad C' = 0$$

$$E = D^2 r^2 \frac{\sin v^2}{(a + r \cos v)^2}$$

$$F = 0$$

$$G = D^2 r^2 \frac{(a \cos v + r)^2}{(a + r \cos v)^4};$$

$$\sqrt{EG - F^2} = D^2 r^2 \frac{\sin v (a \cos v + r)}{(a + r \cos v)^3}.$$

Da $f = F = 0$, so folgt daraus, dass die beiden Linienschaaren auf der Kugel und in der Ebene aufeinander senkrecht stehen, weil $\vartheta = \Theta = 90^0$ ist. Es ist aber auch $\operatorname{tg} 2\omega_1 = \operatorname{tg} 2\Omega_1 = 0$, die beiden Linienschaaren geben also selbst die Hauptrichtungen in jedem Punkte an, und die in diesen gemessenen Vergrösserungsverhältnisse sind

$$k_1 = \sqrt{\frac{E}{e}} = \frac{D}{a + r \cos v}$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{G}{g}} = D \frac{a \cos v + r}{(a + r \cos v)^2}$$

und die Flächenvergrösserung

$$K = \sqrt{\frac{EG - F^2}{eg - f^2}} = \frac{D^2 (a \cos v + r)}{(a + r \cos v)^3}.$$

Die Maximaländerung der Winkel ist gegeben durch

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{r - a}{r + a} \operatorname{tg} \frac{v^2}{2}$$

übereinstimmend mit den früher erhaltenen Werten. Die im Azimute ω gemessene Vergrösserung ist

$$k_\omega^2 = k_1^2 \sin \omega^2 + k_2^2 \cos \omega^2,$$

wobei ω der Winkel ist, welchen die Richtung k_ω mit der u-Linie, also mit dem Radiusvektor des Punktes einschliesst. Für den Mittelpunkt der Karte ist $v = 0$, daher $k_1 = k_2 = \frac{D}{a + r}$, folglich auch $k_\omega = \frac{D}{a + r}$, $\delta' = 0$, demnach werden im Mittelpunkte der Karte die Winkel unverändert übertragen, und da auch die Vergrösserungen hier nach allen Richtungen dieselben sind, so findet im Mittelpunkte der Karte keine Verzerrung statt.

Die Gesammtabweichung der Karte vom Original wird gegeben durch

$$U = \iint [(k_1 - 1)^2 + (k_2 - 1)^2] \sqrt{eg - f^2}\, du\, dv =$$

$$= \int_{v_0}^{v_1}\int_{u_0}^{u_1} \left[\left(\frac{D}{a + r \cos v} - 1\right)^2 + \left(\frac{D (a \cos v + r)}{(a + r \cos v)^2} - 1\right)^2\right] r^2 \sin v\, du\, dv.$$

Führt man hier die Integration nach u aus, und setzt dann $x = \cos v$, so wird:

$$U = -(u_1 - u_0) \int_{x_0}^{x_1} \left[\left(\frac{D}{a + rx} - 1 \right)^2 + \left(\frac{D\,(ax + r)}{(a + rx)^2} - 1 \right)^2 \right] r^2\, dx.$$

Da nun

$$ax + r = \frac{a\,(a + rx) - a^2 + r^2}{r},$$

so wird, wenn man noch Kürze halber $a + rx = y$ setzt:

$$\begin{aligned} U = -(u_1 - u_0) \int_{y_0}^{y_1} \Big[& \frac{D^2}{y^2} - 2\,\frac{D}{y} + 1 \\ & + \frac{D^2\,(a^2 - r^2)^2}{r^2 y^4} - 2\,\frac{a\,D^2\,(a^2 - r^2)}{r^2 y^3} + \frac{a^2 D^2}{r^2 y^2} \\ & + \frac{2\,D\,(a^2 - r^2)}{r y^2} - 2\,\frac{a\,D}{r y} + 1 \Big] r\, dy \end{aligned}$$

und integriert:

$$\begin{aligned} U = r\,(u_1 - u_0) \Big\{ & \frac{D^2}{y} + 2\,D \log_n y - y \\ & + \frac{D^2\,(a^2 - r^2)^2}{3 r^2 y^3} - \frac{a\,D^2\,(a^2 - r^2)}{r^2 y^2} + \frac{a^2 D^2}{r^2 y} \\ & + 2\,\frac{D\,(a^2 - r^2)}{r y} + 2\,\frac{a\,D}{r} \log_n y - y \Big\}_{y_0}^{y_1}. \end{aligned}$$

Nimmt man nun ein kreisförmiges Stück der Karte von $v_0 = 0$ bis $v_1 = v$, so wird

$$u_0 = 0; \quad u_1 = 2\pi;$$

daher

$$u_1 - u_0 = 2\pi;$$

ferner:

$$x_0 = 1; \qquad x_1 = \cos v;$$

$$y_0 = a + r; \qquad y_1 = a + r \cos v.$$

Setzt man demnach, indem man die Glieder mit D^2, D^1 und D^0 zusammenfasst und $\frac{a}{r} = x$ setzt:

$$\begin{aligned} A = 2r\pi \Big[& \frac{(a^2 - r^2)^2}{3 r^2 y_1^3} - \frac{(a^2 - r^2)^2}{3 r^2 y_0^3} - \frac{a\,(a^2 - r^2)}{r^2 y_1^2} + \frac{a\,(a^2 - r^2)}{r^2 y_0^2} + \frac{a^2 + r^2}{r^2 y_1} \\ & - \frac{a^2 + r^2}{r^2 y_0} \Big] \\ = 2\pi \Big[& \frac{(x^2 - 1)^2}{3\,(x + \cos v)^3} - \frac{x\,(x^2 - 1)}{(x + \cos v)^2} + \frac{x^2 + 1}{x + \cos v} - \frac{(x - 1)^2}{3\,(x + 1)} + \frac{x\,(x - 1)}{x + 1} \\ & - \frac{x^2 + 1}{x + 1} \Big] \\ = 2\pi \Big[& \frac{(x^2 - 1)^2}{3\,(x + \cos v)^3} - \frac{x\,(x^2 - 1)}{(x + \cos v)^2} + \frac{x^2 + 1}{x + \cos v} - \frac{x^2 + x + 4}{3\,(x + 1)} \Big] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 2r\pi \left[\frac{a^2 - r^2}{r y_1} - \frac{a^2 - r^2}{r y_0} + \frac{a}{r} \log_n \frac{y_1}{y_0} + \log_n \frac{y_1}{y_0} \right] \\ &= 2\pi r \left[\frac{x^2 - 1}{x + \cos v} - (x - 1) + (x + 1) \log_n \frac{x + \cos v}{x + 1} \right] \end{aligned}$$

$$C = -4r\pi\,(y_1 - y_0) = +4\pi r^2 (1 - \cos v) = 8\pi r^2 \sin \tfrac{1}{2} v^2,$$

so wird

$$U = AD^2 + 2BD + C. \tag{23}$$

1. Für die stereographische Projektion ist $x = 1$ und daher

$$A = 2\pi\left(\frac{2}{1+\cos v} - 1\right) = 2\pi\left(\sec\frac{v^2}{2} - 1\right) = 2\pi \operatorname{tg}\frac{v^2}{2}$$

$$B = 4\pi r \log_n \frac{1+\cos v}{2} = 4\pi r \log_n \cos\frac{v^2}{2}$$

$$C = 8\pi r^2 \sin \tfrac{1}{2} v^2,.$$

daher

$$U = 2\pi\left(D^2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v^2 + 4rD \log_n \cos \tfrac{1}{2} v^2 + 4r^2 \sin \tfrac{1}{2} v^2\right),$$

also wenn $D = r$ gesetzt wird für die Darstellung der Halbkugel

$$U = 2\pi r^2 \,(3 - 4 \log_n 2).$$

2. Für die centrale Projektion ist $x = 0$, daher

$$A = 2\pi\left[\frac{1}{3\cos v^3} + \frac{1}{\cos v} - \tfrac{4}{3}\right]$$

$$B = 2\pi r\left[1 - \frac{1}{\cos v} + \log_n \cos v\right],$$

also wenn $D = r$ gesetzt wird:

$$U = 2\pi r^2\left[\frac{1}{3\cos v^3} + \frac{1}{\cos v} - \tfrac{4}{3} + 2 - \frac{2}{\cos v} + 2\log_n \cos v + 4 \sin \tfrac{1}{2} v^2\right]$$

$$= 2\pi r^2\left[\frac{1}{3\cos v^3} - \frac{1}{\cos v} + \tfrac{2}{3} + 2\log_n \cos v + 4 \sin \tfrac{1}{2} v^2\right]$$

3. Für die orthographische ist $a = D = \infty$,

$$U = \int\!\!\int (1 - \cos v)^2 \, r^2 \sin v \, dv \, du =$$

$$= 2\pi r^2 \int 4 \sin\frac{v^4}{2} \cdot 4 \sin\frac{v}{2} \cos\frac{v}{2}\, d\,\frac{v}{2} = 32\,\pi r^2 \int \sin\frac{v^5}{2}\, d \sin\frac{v}{2}$$

$$= + \tfrac{16}{3}\pi r^2 \sin\frac{v^6}{2}$$

Für die Darstellung der Halbkugel nehmen die in (23) auftretenden Coefficienten A, B, C die Werte an

$$\left.\begin{aligned}
A &= 2\pi\left[\frac{(x^2-1)^2}{3x^3} - \frac{x^2-1}{x} + \frac{x^2+1}{x} - \frac{x^2+x+4}{3(x+1)}\right] \\
&= 2\pi\, \frac{4x^2+x+1}{3x^3(x+1)} \\
B &= 2\pi r\left[\frac{x^2-1}{x} - (x-1) + (x+1)\log_n \frac{x}{x+1}\right] \\
&= 2\pi r\left[\left(1 - \frac{1}{x}\right) - (x+1)\log_n\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] \\
C &= 4\pi r^2.
\end{aligned}\right\} \tag{23a}$$

James wählt nun für eine externe Projektion, für welche $x = 1{\cdot}5$ ist, D derart, dass der Gesammtfehler ein Minimum wird; dann muss

$$\frac{\partial U}{\partial D} = 0,$$

also

$$AD + B = 0,$$

oder

$$D = -\frac{B}{A}.$$

sein. Mit den für $x = 1{\cdot}5$ aus (23a) folgenden Werten von A und B wird

$$D = 2{\cdot}077234\, r.$$

Die Projektionsebene hat daher vom Kugelmittelpunkt den Abstand $D - a = 0{\cdot}577234\, r$, welchem Werte der Parallelkreis, dessen Breite $35^0\, 17'\, 26''$ ist, entspricht. [1])

A. R. Clarke stellt die Aufgabe in der Weise (Philosophical Magazine 1862 pag. 306) gleichzeitig D und x so zu bestimmen, dass U ein absolutes Minimum wird.

Hierzu muss

$$\frac{\partial U}{\partial D} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

sein. Die erste Gleichung giebt

$$AD + B = 0,$$

also

$$D = -\frac{B}{A}$$

und hiermit wird der Wert von U

$$U_0 = C - \frac{B^2}{A}.$$

Es ist ferner

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x} D^2 + 2 \frac{\partial B}{\partial x} D,$$

weil C von x unabhängig ist. Setzt man hier den Wert von D ein, so wird:

$$0 = \frac{B^2}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{2B}{A} \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Die letzte Gleichung giebt den Wert von x und hiermit erhält man aus $D = -\frac{B}{A}$ den Wert von D. Statt dessen sucht *Clarke* den

1) Es muss jedoch auch hier darauf hingewiesen werden, dass die Entfernung D ohne jeden Einfluss auf das Kartenbild ist. Für $x = 1{\cdot}5$, $D = a + r$ kann man die Werte von ϱ, k_1, k_2, K, $\frac{\delta}{2}$ aus Tafel 4 direkt entnehmen. Für ein anderes D sind die Werte von ϱ, k_1, k_2, in dem Verhältnisse $\frac{D}{r + a}$ für K im Verhältnisse $\left(\frac{D}{r + a}\right)^2$ zu vergrössern. Die Gesammtänderung in dem hier angeführten Sinne wird allerdings nicht mehr ein absolutes Minimum, da ja die sämmtlichen linearen Dimensionen im Verhältnis zu denjenigen der dargestellten Kugel geändert werden, was aber von keinem Belange ist, da man zu dem Massstabe der Karte immer einen Wert des Kugelhalbmessers (für ungeändertes x) finden kann, so dass für diese neue Kugel U ein Minimum ist (s. auch hierüber das bei der *Murdoch*'schen Projektion Gesagte § 23).

Wert von U_0 für verschiedene Werte von x und aus denselben das Minimum. Er fand auf diese Weise

$$D = 1{\cdot}66261\, r; \qquad a = 1{\cdot}36763\, r.$$

Da übrigens

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{8x^3 + 7x^2 + 6x + 3}{3(x^3 + x^2)^2}$$

$$\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \log_n\left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

so erhält man aus der Gleichung

$$0 = \frac{B^2}{A^2}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{2B}{A}\frac{\partial B}{\partial x}$$

welche sich auch

$$B\frac{\partial A}{\partial x} - 2A\frac{\partial B}{\partial x} = 0$$

schreiben lässt[1]), die zur Bestimmung von x dienende Gleichung:

$$(16x^4 + 17x^3 + 13x^2 + 3x - 1) - x(x+1)(16x^3 + 9x^2 + 8x + 3)$$
$$\times \log_n\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0;$$

als Lösung findet *Fiorini* (l. c. pag. 217)

$$x = 1{\cdot}470,$$

womit

$$D = 2{\cdot}03766\, r$$

wird, was allerdings mit dem von *Clarke* gefundenen Werte nicht übereinstimmt.

45. Für Kegelprojektionen ist, wenn die geographische Breite φ als Variable v gewählt wird:

$$\begin{aligned} x &= r\cos u\cos v \qquad & e &= r^2\cos v^2 \\ y &= r\sin u\cos v & f &= 0 \\ z &= r\sin v & g &= r^2; \qquad \sqrt{eg - f^2} = r^2\cos v. \end{aligned}$$

Für die Darstellung in der Ebene ist

$$X = \varrho\cos mu$$
$$Y = \varrho\sin mu$$
$$Z = 0$$

wobei

$$\varrho = a + f(e); \quad \frac{d\varrho}{dv} = f'(e)\frac{de}{dv}$$

und da $e = \beta - v$, so ist

$$\frac{de}{dv} = -1$$

$$\frac{d\varrho}{dv} = -f'(e).$$

---

1) Der Ausdruck ist ein vollständiges Differential nämlich $\frac{\partial}{\partial x}\log_n\frac{B^2}{A}$; von dieser Form kann man natürlich keinen Gebrauch machen, da die Gleichung keine identische, sondern eine Bestimmungsgleichung ist.

Man findet daher

$$A = -m\varrho \sin mu \qquad A' = -f'(e)\cos mu \qquad E = m^2\varrho^2$$
$$B = +m\varrho \cos mu \qquad B' = -f'(e)\sin mu \qquad F = 0$$
$$C = 0 \qquad C' = 0 \qquad G = f'(e)^2;$$
$$\sqrt{EG - F^2} = m\varrho f'(e).$$

Da $F = 0$, so sind hier die Schaaren der u- und v-Linien auf einander senkrecht, wie dies a priori bekannt ist. Man hat daher

$$k_1 = \frac{m\varrho}{r\cos v} \qquad K = \frac{m\varrho f'(e)}{r^2\cos v}$$
$$k_2 = \frac{f'(e)}{r} \qquad k^2 = k_1^2 \sin\omega^2 + k_2^2\cos\omega^2,$$

wobei ω der vom Meridian aus gezählte Winkel, also das Azimut der Richtung ist. Für das Maximum der Winkeländerung folgt:

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{f'(e)\cos v - m\varrho}{f'(e)\cos v + m\varrho}.$$

Es ist aber hier auch sehr einfach die für das Ellipsoid geltenden Gleichungen zu erhalten. Man hat nämlich für dieses (s. pag. 197):

$$x = \frac{A\cos u\cos v}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin v^2}} \qquad a = -\frac{A\sin u\cos v}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin v^2}} \qquad a' = -\frac{A\cos u\sin v\,(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2\sin v^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$y = \frac{A\sin u\cos v}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin v^2}} \qquad b = +\frac{A\cos u\cos v}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin v^2}} \qquad b' = -\frac{A\sin u\sin v\,(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2\sin v^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$z = \frac{A(1-\varepsilon^2)\sin v}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin v^2}} \qquad c = 0 \qquad c' = +\frac{A(1-\varepsilon^2)\cos v}{(1-\varepsilon^2\sin v^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$e = \frac{A^2\cos v^2}{1-\varepsilon^2\sin v^2}$$
$$f = 0$$
$$g = \frac{A^2(1-\varepsilon^2)^2}{(1-\varepsilon^2\sin v^2)^3} \qquad \sqrt{eg - f^2} = \frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos v}{(1-\varepsilon^2\sin v^2)^2}.$$

Behält man auch hier für die Kegelprojektionen die Form

$$\Theta = mu$$
$$\varrho = a + f(e)$$

bei, so wird

$$\left.\begin{aligned}
k_1 &= \frac{m\varrho}{A\cos v}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin v^2}\\
k_2 &= \frac{f'(e)}{A(1-\varepsilon^2)}(1-\varepsilon^2\sin v^2)^{\frac{3}{2}};\\
K &= \frac{m\varrho f'(e)}{A^2(1-\varepsilon^2)\cos v}(1-\varepsilon^2\sin v^2)^2\\
\sin\frac{\delta}{2} &= \frac{f'(e)(1-\varepsilon^2\sin v^2)\cos v - m\varrho(1-\varepsilon^2)}{f'(e)(1-\varepsilon^2\sin v^2)\cos v + m\varrho(1-\varepsilon^2)}
\end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Die Gesammtänderung der Karte wird gegeben durch den Ausdruck

$$U_\bullet = \iint [(k_1-1)^2 + (k_2-1)^2]\,\frac{A^2(1-\varepsilon^2)\cos v}{(1-\varepsilon^2\sin v^2)^2}\,du\,dv,$$

das Integral ausgedehnt über die ganze dargestellte Fläche.

Für Cylinderprojektionen ist:

$$X = r u \qquad A = r \qquad A' = 0 \qquad E = r^2$$

$$Y = r f(v) \qquad B = 0 \qquad B' = r f'(v) \qquad F = 0$$

$$Z = 0 \qquad C = 0 \qquad C' = 0 \qquad G = r^2 f'(v)^2 \qquad \sqrt{EG - F^2} = r^2 f'(v)$$

$$k_1 = \frac{1}{\cos v}; \quad k_2 = f'(v); \quad K = \frac{f'(v)}{\cos v}$$

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{f'(v)\cos v - 1}{f'(v)\cos v + 1} \qquad U = \int\!\!\int [(k_1 - 1)^2 + (k_2 - 1)^2] r^2 \cos v \, du \, dv$$

und um die Formeln mit den früher gefundenen zu identificieren, hat man nur $v = \varphi$ zu setzen. Auf spezielle Fälle gehen wir hier nicht ein, da dieselben bereits früher behandelt wurden, doch wollen wir auch hier die Aufgabe lösen, ϱ so als Funktion von φ zu bestimmen, dass U ein Minimum wird.

Man kann für die Werte von k_1, k_2 in (24) einfach schreiben

$$k_1 = \frac{m\varrho}{r_1}; \qquad k_2 = \frac{f'(e)}{r_2} = -\frac{1}{r_2}\frac{d\varrho}{d\varphi}$$

$$\sqrt{eg - f^2} = r_1 r_2,$$

wenn r_1, r_2 Radius des Parallelkreises und Krümmungsradius des Meridians bedeuten, also

$$r_1 = \frac{A \cos\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin\varphi^2}}$$

$$r_2 = \frac{A(1 - \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2 \sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und dann ist

$$U = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left\{ \left[\frac{m\varrho}{r_1} - 1\right]^2 + \left[\frac{1}{r_2}\frac{d\varrho}{d\varphi} + 1\right] \right\} r_1 r_2 \, d\varphi.$$

Setzt man

$$V = \left\{ \left[\frac{m\varrho}{r_1} - 1\right]^2 + \left[\frac{1}{r_2}\frac{d\varrho}{d\varphi} + 1\right]^2 \right\} r_1 r_2,$$

so wird

$$U = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} V \, d\varphi.$$

Aus der Bedingung, dass dieses Integral ein Minimum werden soll, erhält man

$$\frac{\partial V}{\partial \varrho} - \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\partial V}{\partial \frac{d\varrho}{d\varphi}}\right) = 0, \tag{a}$$

als Hauptgleichung, und

$$\left\{\frac{\partial V}{\partial \frac{d\varrho}{d\varphi}}\right\}_{\varphi_1} = 0; \qquad \left\{\frac{\partial V}{\partial \frac{d\varrho}{d\varphi}}\right\}_{\varphi_2} = 0, \tag{b}$$

als Grenzgleichungen. Aus der Gleichung (a) erhält man die Form der Funktion ϱ, aus der zweiten, (b) die Bestimmung der durch die Integration der Differentialgleichungen eintretenden Constanten. Nun ist

$$\frac{\partial V}{\partial \varrho} = 2\left(\frac{m\varrho}{r_1} - 1\right) m r_2, \quad \frac{\partial V}{\partial \frac{d\varrho}{d\varphi}} = 2\left(\frac{1}{r_2}\frac{d\varrho}{d\varphi} + 1\right) r_1,$$

daher die Hauptgleichung:

$$\left(\frac{m\varrho}{r_1} - 1\right) m r_2 - \frac{d}{d\varphi}\left\{\left(\frac{1}{r_2}\frac{d\varrho}{d\varphi} + 1\right) r_1\right\} = 0.$$

Da aber

$$\frac{dr_1}{d\varphi} = -\frac{A \sin\varphi\,(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}} = -r_2\sin\varphi$$

$$\frac{dr_2}{d\varphi} = +\frac{3\, r_2\varepsilon^2 \sin\varphi\cos\varphi}{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}$$

ist, so erhält man

$$\left(\frac{m\varrho}{r_1} - 1\right) m r_2 + \left(\frac{1}{r_2}\frac{d\varrho}{d\varphi} + 1\right) r_2\sin\varphi - \frac{r_1}{r_2}\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2} + \frac{r_1}{r_2^2}\frac{d\varrho}{d\varphi}\frac{dr_2}{d\varphi} = 0$$

$$-\frac{m^2\varrho\, r_2}{r_1} + m r_2 + \frac{d\varrho}{d\varphi}\left(\frac{1}{r_2}\frac{dr_1}{d\varphi}\right) - r_2\sin\varphi + \frac{r_1}{r_2}\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2} - \frac{r_1}{r_2^2}\frac{dr_2}{d\varphi}\frac{d\varrho}{d\varphi} = 0$$

$$\frac{r_1}{r_2}\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2} + \frac{d\varrho}{d\varphi}\,\frac{r_2\frac{dr_1}{d\varphi} - r_1\frac{dr_2}{d\varphi}}{r_2^2} - m^2\frac{r_2}{r_1}\varrho + (m - \sin\varphi)\, r_2 = 0$$

oder

$$\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2} + \frac{r_2}{r_1}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)\cdot\frac{d\varrho}{d\varphi} - m^2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\varrho + (m - \sin\varphi)\frac{r_2^2}{r_1} = 0 \tag{25}$$

Behufs Integration der Gleichung (25) behandeln wir zunächst die reducierte Gleichung

$$\frac{d^2\varrho_0}{d\varphi^2} + \frac{d}{d\varphi}\left(\log_n\frac{r_1}{r_2}\right)\frac{d\varrho_0}{d\varphi} - \left(m\frac{r_2}{r_1}\right)^2\varrho_0 = 0. \tag{25a}$$

Setzt man hier

$$\varrho_0 = e^{\int \omega\, d\varphi},$$

so wird

$$\frac{d\varrho_0}{d\varphi} = \omega e^{\int\omega\,d\varphi}; \quad \frac{d^2\varrho_0}{d\varphi^2} = \left(\omega^2 + \frac{d\omega}{d\varphi}\right) e^{\int\omega\,d\varphi},$$

daher

$$\frac{d\omega}{d\varphi} + \omega^2 + \omega\frac{r_2}{r_1}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{r_1}{r_2}\right) - \left(m\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = 0,$$

oder

$$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\left[\frac{r_1}{r_2}\frac{d\omega}{d\varphi} + \omega\frac{d\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}{d\varphi}\right] + \omega^2 - \left(m\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = 0$$

$$\frac{r_2}{r_1}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{r_1}{r_2}\omega\right) + \omega^2 - \left(m\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = 0,$$

welche Gleichung befriedigt wird durch

$$\omega = \pm m\frac{r_2}{r_1}.$$

Es ist daher

$$\varrho_0' = e^{\int m \frac{r_2}{r_1} d\varphi}; \quad \varrho_0'' = e^{-\int m \frac{r_2}{r_1} d\varphi} \tag{26}$$

$$\varrho_0 = C_1 \varrho_0' + C_2 \varrho_0''.$$

Diese Form kann man auch für das Integral ϱ von (25) beibehalten, also

$$\varrho = C_1 \varrho_0' + C_2 \varrho_0''$$

setzen, wenn man nur C_1, C_2 so als Variable ansieht, dass

$$\left.\begin{aligned} &\varrho_0' \frac{d C_1}{d\varphi} + \varrho_0'' \frac{d C_2}{d\varphi} = 0 \\ &\frac{d\varrho_0'}{d\varphi}\frac{d C_1}{d\varphi} + \frac{d\varrho_0''}{d\varphi}\frac{d C_2}{\delta\varphi} + (m - \sin\varphi)\frac{r_2^2}{r_1} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{m}$$

ist. Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$\left(\varrho_0' \frac{d\varrho_0''}{d\varphi} - \varrho_0'' \frac{d\varrho_0'}{d\varphi}\right)\frac{d C_1}{d\varphi} = + \varrho_0''(m - \sin\varphi)\frac{r_2^2}{r_1}$$

$$\left(\varrho_0' \frac{d\varrho_0''}{d\varphi} - \varrho_0'' \frac{d\varrho_0'}{d\varphi}\right)\frac{d C_2}{d\varphi} = - \varrho_0'(m - \sin\varphi)\frac{r_2^2}{r_1}.$$

Aus (26) folgt

$$\frac{d\varrho_0'}{d\varphi} = \varrho_0' \cdot m \frac{r_2}{r_1}; \quad \frac{d\varrho_0''}{d\varphi} = - \varrho_0'' \cdot m \frac{r_2}{r_1}$$

$$\varrho_0' \frac{d\varrho_0''}{d\varphi} - \varrho_0'' \frac{d\varrho_0'}{d\varphi} = - 2\varrho_0'\varrho_0'' m \frac{r_2}{r_1} = - 2m\frac{r_2}{r_1},$$

da $\varrho_0'\varrho_0'' = 1$ ist. Man hat daher

$$\frac{d C_1}{d\varphi} = -(m - \sin\varphi)\frac{r_2\varrho_0''}{2m}$$

$$\frac{d C_2}{d\varphi} = +(m - \sin\varphi)\frac{r_2\varrho_0'}{2m}$$

und dann wird mit Rücksicht auf die erste der Gleichungen (m):

$$k_1 = \frac{m\varrho}{r_1} = \frac{m}{r_1}(C_1\varrho_0' + C_2\varrho_0'')$$

$$k_2 = -\frac{1}{r_2}\frac{d\varrho}{d\varphi} = -\frac{1}{r_2}\left(C_1\frac{d\varrho_0'}{d\varphi} + C_2\frac{d\varrho_0''}{d\varphi}\right) = -\frac{m}{r_1}(C_1\varrho_0' - C_2\varrho_0'').$$

Nun ist

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{1 - \varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2\sin\varphi^2)\cos\varphi}$$

$$\int m\frac{r_2}{r_1}d\varphi = m(1 - \varepsilon^2)\int\frac{d\sin\varphi}{(1 - \varepsilon^2\sin\varphi^2)(1 - \sin\varphi^2)}$$

$$= \frac{m}{2}\left[\log_n\frac{1 + x}{1 - x} - \varepsilon\log_n\frac{1 + \varepsilon x}{1 - \varepsilon x}\right],$$

wenn $x = \sin\varphi$ gesetzt wird; daher

$$\varrho_0' = \left\{\frac{1 + x}{1 - x}\left(\frac{1 - \varepsilon x}{1 + \varepsilon x}\right)^\varepsilon\right\}^{\frac{m}{2}}; \quad \varrho_0'' = \left\{\frac{1 - x}{1 + x}\left(\frac{1 + \varepsilon x}{1 - \varepsilon x}\right)^\varepsilon\right\}^{\frac{m}{2}},$$

wobei eine Integrationsconstante unnötig wird, da dieselbe als Faktor e^c heraustreten und sich mit C_1, C_2 vereinigen würde. Hiernach wird

$$\frac{dC_1}{d\varphi} = -\frac{m-x}{2m}\,\frac{A(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2x^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{\frac{1-x}{1+x}\left(\frac{1+\varepsilon x}{1-\varepsilon x}\right)^{\varepsilon}\right\}^{\frac{m}{2}}$$

$$\frac{dC_2}{d\varphi} = +\frac{m-x}{2m}\,\frac{A(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2x^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{\frac{1+x}{1-x}\left(\frac{1-\varepsilon x}{1+\varepsilon x}\right)^{\varepsilon}\right\}^{\frac{m}{2}}$$

und das vollständige Integral der Gleichung (25)

$$\varrho = \varrho_0'\left\{-\int\frac{m-x}{2m}\,\frac{A(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2x^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{\frac{1-x}{1+x}\left(\frac{1+\varepsilon x}{1-\varepsilon x}\right)^{\varepsilon}\right\}^{\frac{m}{2}}d\varphi + C_1'\right\}$$

$$+\,\varrho_0''\left\{+\int\frac{m-x}{2m}\,\frac{A(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2x^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{\frac{1+x}{1-x}\left(\frac{1-\varepsilon x}{1+\varepsilon x}\right)^{\varepsilon}\right\}^{\frac{m}{2}}d\varphi + C_2'\right\}.$$

Diese Integrale lassen sich für beliebige Werte von m nicht in geschlossener Form angeben, selbst für die Kugel, für welche $\varepsilon = 0$ ist; werden sie nicht wesentlich einfacher; für diesen Fall hat man nämlich

$$\varrho_0' = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{m}{2}};\quad \varrho_0'' = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{m}{2}}$$

$$\varrho = \varrho_0'\left\{-\int\frac{m-x}{2m}A\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{m}{2}}d\varphi + C_1'\right\}$$

$$+\,\varrho_0''\left\{+\int\frac{m-x}{2m}A\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{m}{2}}d\varphi + C_2'\right\}.$$

Für $m = 1$ erhält man[1]), wenn man berücksichtigt, dass

$$d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

ist:

$$\varrho = \varrho_0'\left\{-\tfrac{1}{2}\int dx\,\frac{A(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2x^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left(\frac{1+\varepsilon x}{1-\varepsilon x}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\frac{1-x}{1+x} + C_1'\right\}$$

$$+\,\varrho_0''\left\{+\tfrac{1}{2}\int dx\,\frac{A(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2x^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{1-\varepsilon x}{1+\varepsilon x}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} + C_2'\right\}.$$

Für die Kugel erhält man hieraus

$$\varrho = \varrho_0'\left(C_1' - \frac{A}{2}\int dx\,\frac{1-x}{1+x}\right) + \varrho_0''\left(C_2' + \frac{A}{2}\int dx\right)$$

$$= \varrho_0'\left(C_1' - A\log_n(1+x) + \frac{A}{2}x\right) + \varrho_0''\left(C_2' + \frac{A}{2}x\right)$$

und da

$$\varrho_0' = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}};\quad \varrho_0'' = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

1) Die folgenden Entwicklungen gelten also nicht mehr für die Kegelprojektionen im allgemeinen, sondern für den Fall einer Abbildung auf einer die Erde im Pole berührenden Ebene, eventuell, wenn der Berührungspunkt nicht der Pol ist, für eine zenitale Projektion.

so wird

$$\varrho = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(C_1' - A\log_n(1+x) + \frac{A}{2}x\right) + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(C_2' + \frac{A}{2}x\right)$$

oder da

$$x = \sin\varphi = \cos p,$$

(wenn $p = 90 - \varphi$ wieder die Poldistanz bedeutet), so folgt für die Abbildung der Kugel als Halbmesser des Parallelkreises, dessen Poldistanz p ist:

$$\varrho = \cot\frac{p}{2}\left(C_1' - A\log_n\left\{2\cos\frac{p^2}{2}\right\} + \frac{A}{2}\cos p\right) + \operatorname{tg}\frac{p}{2}\left(C_2' + \frac{A}{2}\cos p\right). \tag{26a}$$

Entwickelt man in der letzten Gleichung für ϱ, welche sich auf das Ellipsoid bezieht, nach Potenzen von ε, und bleibt bei der zweiten Potenz stehen, so wird:

$$\varrho_0' = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}(1-\varepsilon^2 x); \qquad \varrho_0'' = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}(1+\varepsilon^2 x)$$

$$\varrho = \varrho_0'\left\{C_1' - \frac{A}{2}(1-\varepsilon^2)\int\frac{1-x}{1+x}(1+\varepsilon^2 x + \tfrac{3}{2}\varepsilon^2 x^2)\,dx\right\}$$

$$+ \varrho_0''\left\{C_2' + \frac{A}{2}(1-\varepsilon^2)\int(1-\varepsilon^2 x + \tfrac{3}{2}\varepsilon^2 x^2)\,dx\right\}$$

oder[1])

$$\varrho = \varrho_0' C_1' + \varrho_0'' C_2' + \frac{A}{2}(1-\varepsilon^2)\left[x(1+\varepsilon^2) - \varepsilon^2 x^2 + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 x^3 - \log_n(1+x)(2+\varepsilon^2)\right]\varrho_0'$$

$$+ \frac{A}{2}(1-\varepsilon^2)\left[x - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 x^2 + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 x^3\right]\varrho_0''$$

$$\varrho = \varrho_0'\left[C_1' + \frac{A}{2}\left\{x - \varepsilon^2 x^2 + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 x^3 - (2-\varepsilon^2)\log_n(1+x)\right\}\right]$$
$$+ \varrho_0''\left[C_2' + \frac{A}{2}\left\{(1-\varepsilon^2)x - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 x^2 + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 x^3\right\}\right] \tag{26b}$$

Zur Bestimmung der Constanten C_1', C_2' dient die Gleichung

$$\left\{\left(\frac{1}{r_2}\frac{d\varrho}{d\varphi} + 1\right) r_1\right\}_{\varphi_1}^{\varphi_2} = 0,$$

daher mit Rücksicht auf den Wert von $\frac{d\varrho}{d\varphi} = \frac{m r_2}{r_1}(C_1\varrho_0' - C_2\varrho_0'')$

$$\left\{\left[\frac{m}{r_1}(C_1\varrho_0' - C_2\varrho_0'') + 1\right] r_1\right\}_{\varphi_1}^{\varphi_2} = 0,$$

oder, da hier $m = 1$ ist:

$$C_1\varrho_0' - C_2\varrho_0'' + r_1 = 0$$

1) Da

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{1+x} - 1; \quad \frac{1-x}{1+x}x = -x + 2 - \frac{2}{1+x}$$

$$\frac{1-x}{1+x}x^2 = -x^2 + 2x - 2 + \frac{2}{1+x}$$

für die geographischen Breiten φ_1 und φ_2 oder Poldistanzen p_1 und p_2, und eingesetzt:

$$C_1 \cot\frac{p}{2}(1-\varepsilon^2\cos p) - C_2 \operatorname{tg}\frac{p}{2}(1+\varepsilon^2\cos p) + \frac{A\sin p}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos p^2}} = 0$$

wobei C_1 der Faktor von ϱ_0', C_2 derjenige von ϱ_0'' in dem Ausdrucke für ϱ ist, also:

$$C_1 = C_1' + \frac{A}{2}\left\{x - \varepsilon^2 x^2 + \tfrac{1}{3}\varepsilon^2 x^3 - (2-\varepsilon^2)\log_n(1+x)\right\}$$

$$C_2 = C_2' + \frac{A}{2}\left\{(1-\varepsilon^2)\,x - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 x^2 + \tfrac{1}{3}\varepsilon^2 x^3\right\}$$

Für die Kugel ist also:

$$\left(C_1' - A\log_n\left(2\cos\frac{p^2}{2}\right) + \frac{A}{2}\cos p\right)\cot\frac{p}{2} - \left(C_2' + \frac{A}{2}\cos p\right)\operatorname{tg}\frac{p}{2} + A\sin p = 0.$$

Setzt man hier $p = p_1$ und $p = p_2$, so wird man zwei Gleichungen erhalten, aus denen sich C_1' und C_2' bestimmen lassen. Beschränken wir uns nun auf die Kugel, so wird man, wenn man $C_1' - A\log_n 2$ gleich einer neuen Constanten setzt, die ihrer Unbestimmtheit wegen wieder mit C_1' bezeichnet werden darf, zur Bestimmung von C_1', C_2' die Gleichungen haben:

$$\left(C_1' - 2A\log_n\cos\frac{p_1}{2} + \frac{A}{2}\cos p_1\right)\cot\frac{p_1}{2} - \left(C_2' + \frac{A}{2}\cos p_1\right)\operatorname{tg}\frac{p_1}{2} + A\sin p_1 = 0$$

$$\left(C_1' - 2A\log_n\cos\frac{p_2}{2} + \frac{A}{2}\cos p_2\right)\cot\frac{p_2}{2} - \left(C_2' + \frac{A}{2}\cos p_2\right)\operatorname{tg}\frac{p_2}{2} + A\sin p_2 = 0.$$

Der Radius des Parallels, dessen Poldistanz p ist, wird dann

$$\varrho = \left(C_1' - 2A\log_n\cos\frac{p}{2} + \frac{A}{2}\cos p\right)\cot\frac{p}{2} + \left(C_2' + \frac{A}{2}\cos p\right)\operatorname{tg}\frac{p}{2}.$$

Setzt man

$$A\left\{\sin p_1 - 2\log_n\cos\frac{p_1}{2}\cdot\cot\frac{p_1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos p_1\left(\cot\frac{p_1}{2} - \operatorname{tg}\frac{p_1}{2}\right)\right\} = \mathrm{I}$$

$$A\left\{\sin p_2 - 2\log_n\cos\frac{p_2}{2}\cdot\cot\frac{p_2}{2} + \tfrac{1}{2}\cos p_2\left(\cot\frac{p_2}{2} - \operatorname{tg}\frac{p_2}{2}\right)\right\} = \mathrm{II},$$

welche Werte für die äussersten Parallelen deren Poldistanzen $p_1\,p_2$ sind, leicht berechnet werden können, so wird

$$C_1'\cot\frac{p_1}{2} - C_2'\operatorname{tg}\frac{p_1}{2} + \mathrm{I} = 0$$

$$C_1'\cot\frac{p_2}{2} - C_2'\operatorname{tg}\frac{p_2}{2} + \mathrm{II} = 0.$$

Nach einigen leichten Transformationen erhält man übrigens

$$\mathrm{I} = A\left\{\operatorname{cosec} p_1 - 2\cot\frac{p_1}{2}\log_n \cos\frac{p_1}{2}\right\}$$

$$\mathrm{II} = A\left\{\operatorname{cosec} p_2 - 2\cot\frac{p_2}{2}\log_n \cos\frac{p_2}{2}\right\}.$$

Die Auflösung der Gleichungen für C_1', C_2' giebt:

$$C_1'\left(\cot\frac{p_1}{2}\operatorname{tg}\frac{p_2}{2} - \cot\frac{p_2}{2}\operatorname{tg}\frac{p_1}{2}\right) = \mathrm{II}\operatorname{tg}\frac{p_1}{2} - \mathrm{I}\operatorname{tg}\frac{p_2}{2}$$

$$C_2'\left(\cot\frac{p_1}{2}\operatorname{tg}\frac{p_2}{2} - \cot\frac{p_2}{2}\operatorname{tg}\frac{p_1}{2}\right) = \mathrm{II}\cot\frac{p_1}{2} - \mathrm{I}\cot\frac{p_2}{2}$$

und da

$$\cot\frac{p_1}{2}\operatorname{tg}\frac{p_2}{2} - \cot\frac{p_2}{2}\operatorname{tg}\frac{p_1}{2} = \frac{\left(\cos\frac{p_1}{2}\sin\frac{p_2}{2}\right)^2 - \left(\cos\frac{p_2}{2}\sin\frac{p_1}{2}\right)^2}{\sin\frac{p_1}{2}\cos\frac{p_2}{2}\sin\frac{p_2}{2}\cos\frac{p_1}{2}}$$

$$= \frac{4\sin\frac{1}{2}(p_2+p_1)\sin\frac{1}{2}(p_2-p_1)}{\sin p_1 \sin p_2} = \frac{2(\cos p_1 - \cos p_2)}{\sin p_1 \sin p_2}$$

$$\mathrm{II}\operatorname{tg}\frac{p_1}{2} - \mathrm{I}\operatorname{tg}\frac{p_2}{2} = A\left\{2\,\frac{\sin\frac{p_1}{2}^2 - \sin\frac{p_2}{2}^2}{\sin p_1 \sin p_2}\right.$$
$$\left. - 8\,\frac{\sin\frac{p_1}{2}^2\cos\frac{p_2}{2}^2\log_n\cos\frac{p_2}{2} - \sin\frac{p_2}{2}^2\cos\frac{p_1}{2}^2\log_n\cos\frac{p_1}{2}}{\sin p_1 \sin p_2}\right\}$$

$$\mathrm{II}\cot\frac{p_1}{2} - \mathrm{I}\cot\frac{p_2}{2} = A\left\{2\,\frac{\cos\frac{p_1}{2}^2 - \cos\frac{p_2}{2}^2}{\sin p_1 \sin p_2}\right.$$
$$\left. - 8\,\frac{\cos\frac{p_1}{2}^2\cos\frac{p_2}{2}^2\left(\log_n\cos\frac{p_2}{2} - \log_n\cos\frac{p_1}{2}\right)}{\sin p_1 \sin p_2}\right\}$$

ist, so wird

$$C_1' = A\left\{\frac{\sin\frac{p_1}{2}^2 - \sin\frac{p_2}{2}^2}{\cos p_1 - \cos p_2}\right.$$
$$\left. - 4\,\frac{\sin\frac{p_1}{2}^2\cos\frac{p_2}{2}^2\log_n\cos\frac{p_2}{2} - \sin\frac{p_2}{2}^2\cos\frac{p_1}{2}^2\log_n\cos\frac{p_1}{2}}{\cos p_1 - \cos p_2}\right\}$$

$$C_2' = A\left\{\frac{\cos\frac{p_1}{2}^2 - \cos\frac{p_2}{2}^2}{\cos p_1 - \cos p_2} - 4\,\frac{\cos\frac{p_1}{2}^2\cos\frac{p_2}{2}^2}{\cos p_1 - \cos p_2}\log_n\frac{\cos\frac{p_2}{2}}{\cos\frac{p_1}{2}}\right\}.$$

Will man demnach eine solche Karte anfertigen, die zwischen den Parallelkreisen von den Poldistanzen p_1 und p_2 das Minimum der Fehler giebt, so rechnet man nach den letzten beiden Formeln C_1', C_2' und mit diesen Werten findet man für jede Poldistanz p den Wert von ϱ. Wie man sieht, sind aus den Schlussresultaten für

C_1', C_2' die Cotangenten verschwunden, daher die Formeln auch anwendbar, wenn $p_1 = 0$ ist, welcher Fall eintritt, wenn man das ganze Gebiet rings um den Pol darstellen will, was übrigens zumeist stattfinden wird. Denn man ist dabei nicht auf die Darstellung der Polargegenden beschränkt. Legt man nämlich die Projektionsebene berührend in irgend einen Punkt der Kugel, so wird p nicht die Poldistanz, sondern die sphärische Distanz vom Mittelpunkte des darzustellenden Gebietes der Erdoberfläche sein, und man hat es daher mit einer zenitalen Projektion zu thun.

Wenn $p_1 = 0$ gesetzt wird, so folgt

$$C_1' = -\frac{A}{2}$$

$$C_2' = +\frac{A}{2} - 2A \cot\frac{p_2^2}{2} \log_n \cos\frac{p_2}{2},$$

somit

$$\varrho = +2A \cot\frac{p}{2} \log_n \sec\frac{p}{2} + 2A \cot\frac{p_2^2}{2} \log_n \sec\frac{p_2}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{p}{2} \cdot \quad (26\,\mathrm{c})$$

Da der Wert von $\cot\frac{p}{2} \log_n \sec\frac{p}{2}$ für $p = 0$ verschwindet, so ist der Halbmesser des Poles gleich Null, wie es auch sein muss.

Diesen Wert von ϱ giebt die von *A. R. Clarke* und *H. James*[1]) vorgeschlagene Projektion. Der Weg, den Clarke und James einschlagen, ist ein anderer. Es wird zunächst in (26a) die eine Constante so bestimmt, dass für $p = 0$ auch $\varrho = 0$ werde; dann erhält man

$$C_1' = A \log_n 2 - \frac{A}{2},$$

demzufolge

$$\varrho = \cot\frac{p}{2}\left[2A \log_n \sec\frac{p}{2} - A \sin\tfrac{1}{2} p^2\right] + \operatorname{tg}\frac{p}{2}\left[C_2' + \frac{A}{2}\cos p\right].$$

Die zweite Constante wird nun so bestimmt, dass für den äussersten Parallel die Bögen des Meridians in wahrer Grösse erscheinen, also die Zunahme $d\varrho$ des Halbmessers des Parallelkreises der Karte gleich sei dem Bogen $A\,d\varphi$ des Meridians der Erdkugel, aber negativ, weil für wachsende Breiten φ die Halbmesser ϱ abnehmen; es wird also

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = -A.$$

Es ist aber

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = C_1 \frac{d\varrho_0'}{d\varphi} + C_2 \frac{d\varrho_0''}{d\varphi} = (C_1 \varrho_0' - C_2 \varrho_0'')\, m \frac{r_2}{r_1} = -A,$$

also für den vorliegenden Fall ($m = 1$):

$$C_1 \varrho_0' - C_2 \varrho_0'' = -A \sin p_2,$$

oder eingesetzt

$$\cot\frac{p_2}{2}\left(2A \log_n \sec\frac{p_2}{2} - A \sin\frac{p_2^2}{2}\right) - \operatorname{tg}\frac{p_2}{2}\left(C_2' + \frac{A}{2}\cos p_2\right) = -A \sin p_2.$$

1) On projection for maps, by *Henry James* and *A. R. Clarke*, in The Philosophical Magazine IV Serie Bd. 23 (1862) pag. 308.

Multipliciert man mit $\cot \frac{p_2}{2}$, so folgt:

$$2A\cot\frac{p_2^2}{2}\log_n\sec\frac{p_2}{2} - A\cos\frac{p_2^2}{2} - C_2' - \frac{A}{2}\left(2\cos\frac{p_2^2}{2} - 1\right) = -2A\cos\frac{p_2^2}{2}$$

folglich

$$C_2' = \frac{A}{2} + 2A\cot\frac{p_2^2}{2}\log_n\sec\frac{p_2}{2}\cdot$$

Dies oben eingesetzt, giebt:

$$\varrho = 2A\cot\frac{p}{2}\log_n\sec\frac{p}{2} - \frac{A}{2}\sin p + \frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{p}{2} + \frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{p}{2}\cos p$$
$$+ 2A\operatorname{tg}\frac{p}{2}\cot\frac{p_2^2}{2}\log_n\sec\frac{p_2}{2},$$

woraus sich ergiebt:

$$\varrho = 2A\cot\frac{p}{2}\log_n\sec\frac{p}{2} + 2A\operatorname{tg}\frac{p}{2}\cot\frac{p_2^2}{2}\log_n\sec\frac{p_2}{2}\cdot$$

Hieraus ersieht man übrigens noch, dass diese Projektion die Eigenschaft hat, dass am Rande der Karte (für $p = p_2$) die Meridianbögen in wahrer Grösse erscheinen.

Airy[1]) bestimmt die zweite Constante (die erste folgt aus der Bedingung $\varrho = 0$ für $p = 0$) aus der Bedingung, dass für $p = 0$ (also in der Kartenmitte) die Meridianbögen in wahrer Grösse erscheinen. Nun folgt aber:

$$\frac{d\varrho}{dp} = -\frac{A}{\sin\frac{p^2}{2}}\log_n\sec\frac{p}{2} + \frac{3}{4}A + \frac{C_2'}{2\cos\frac{p^2}{2}} - \frac{A}{4}\operatorname{tg}\frac{p^2}{2},$$

also da für $p = 0$

$$\frac{\partial\varrho}{\partial p} = A$$

sein soll,

$$\frac{d\varrho}{dp} = \frac{1}{2}C_2' + \frac{A}{4} = A,$$

demnach

$$C_2' = \frac{3}{2}A,$$

und hiermit

$$\varrho = \cot\frac{p}{2}\left[2A\log_n\sec\frac{p}{2} - A\sin\frac{p^2}{2}\right] + \operatorname{tg}\frac{p}{2}\left(\frac{3}{2}A + \frac{A}{2}\cos p\right)$$
$$= 2A\cot\frac{p}{2}\log_n\sec\frac{p}{2} + A\operatorname{tg}\frac{p}{2}\cdot$$

Diese Form von *Airy* (l. c. pag. 414) genügt jedoch den Grenzgleichungen nicht, und macht daher δU nicht gleich Null.

Um in solchen Zenitalprojektionen (wenn nicht der Pol Kartenmittelpunkt ist) die Netzcurven (Parallelkreise und Meridiane) zu verzeichnen, wird es am besten, für Werte von φ und λ, welche in regelmässigen Intervallen fortschreiten (z. B. von Grad zu Grad, oder von 10 zu 10 Graden) u und v nach pag. 81 zu berechnen; der mit dem Werte von

---

1) Explanation of a Projection by Balance of Errors for Maps in The Philosophical Magazine and Journal of Science IV Serie Bd. 22 (1861) pag. 409.

$v = p$ gerechnete Wert von ϱ wird im Azimute u aufgetragen, und giebt den zur Länge λ und Breite φ gehörigen Kartenpunkt. Die Verbindungslinien der zum selben λ gehörigen Punkte geben die Kartenmeridiane, diejenigen der zum selben φ gehörigen Punkte die Kartenparallelen.

Für Cylinderprojektionen wird:

$$U = 2\pi r^2 \int V\, dv,$$

wenn

$$V = \left[\left(\frac{1}{\cos v} - 1\right)^2 + (f'(v) - 1)^2\right] \cos v.$$

Hier ist

$$\frac{\partial V}{\partial f(v)} = 0,$$

daher wird die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dv}\,\frac{\partial V}{\partial f'(v)} = 0,$$

also

$$\frac{\partial V}{\partial f'(v)} = 2C_1,$$

wenn $2C_1$ eine willkürliche Constante bedeutet. Da aber

$$\frac{\partial V}{\partial f'(v)} = 2[f'(v) - 1] \cos v,$$

so wird

$$f'(v) - 1 = \frac{C_1}{\cos v}$$

oder integriert

$$f(v) = -C_1 \log_n \operatorname{tg}\left(45 - \frac{v}{2}\right) + v + C_2.$$

Soll für $v = 0$ auch $f(v) = 0$ sein, so muss $C_2 = 0$ sein, und es ist

$$f(v) = v - C_1 \log_n \operatorname{tg}\left(45 - \frac{v}{2}\right).$$

46. Aus den Gleichungen des § 42 erhält man für den Fall, dass man es mit der Abbildung auf eine Ebene zu thun hat, wofür Z, $\frac{\partial Z}{\partial u}$, $\frac{\partial Z}{\partial v}$ verschwinden,

$$E = \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}$$

$$G = \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2.$$

Bezeichnet nun v die Länge des Meridianbogens, u die geographische Länge, gezählt vom Meridian des Mittelpunktes des darzustellenden Flächentheiles, und ist p der Halbmesser eines Parallelkreises der Erde, so dass man p und z als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der Meridianellipse ansehen kann, ferner μ der Winkel, welchen die Tangente eines Punktes der letzteren

mit der Verlängerung des Halbmessers des zugehörigen Parallelkreises einschliesst, so ist

$$dp = dv \cos \mu$$
$$dz = dv \sin \mu,$$

folglich

$$p = \int \cos \mu \, dv$$
$$z = \int \sin \mu \, dv.$$

Die Coordinaten des Ellipsoides drücken sich demnach, wenn die X-axe in die Ebene des ersten Meridians gelegt wird, durch

$$x = \cos u \int \cos \mu \, dv$$
$$y = \sin u \int \cos \mu \, dv$$
$$z = \int \sin \mu \, dv$$

aus, wo μ nur eine Funktion der geographischen Breite, also Funktion von v ist, daher von u unabhängig. Aus diesem Grunde ist

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -y \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \cos u \cos \mu$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = +x \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \sin u \cos \mu$$
$$\frac{\partial z}{\partial u} = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \sin \mu$$

und es wird

$$e = x^2 + y^2 = p^2$$
$$f = (-y \cos u + x \sin u) \cos \mu = 0$$
$$g = 1.$$

Nach § 43 ist daher für das Ellipsoid $\cos \vartheta = 0$, also $\vartheta = 90^0$, d. h. die Netzlinien stehen auf einander senkrecht, wie es ja nach der Wahl derselben a priori ersichtlich ist. Für die Ebene wird

$$\cos \Theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}; \quad \sin \Theta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{EG}$$

und die Grösse der Abweichung von Θ von 90^0 wird von dem Werte von F abhängen. Ausserdem war als Wert der Vergrösserung in der Richtung der u- und v-Linien, also hier in der Richtung der Meridiane und Parallelkreise (s. pag. 199)

$$k' = \sqrt{\frac{G}{g}}; \quad k'' = \sqrt{\frac{E}{e}}$$

gefunden, welche Werte, wenn die Netzlinien nicht aufeinander senkrecht stehen, allerdings, wie schon früher bemerkt, nicht das Maximum und Minimum der Vergrösserung sind.

Tissot stellt nun für den Fall, dass man einen kleinen Landstrich darzustellen hat, die Aufgabe, die Coordinaten X und Y als Funktionen von u und v so zu bestimmen, *dass man die möglichst günstige Kartenform erhält.* Wir wollen die daraus entstehende Darstellung nach *Fiorini* die „*Compensative Projektion* von *Tissot*" nennen.

Die Bedingung, dass der darzustellende Flächentheil nur klein sei, gestattet es, die Coordinaten X, Y nach Potenzen von u und v zu entwickeln; aus diesen Entwicklungen folgen dann die Werte von E, F, G, und die günstigste Projektion wird jene sein, wo $\cos\Theta$ also F so nahe als möglich gleich Null, und k', k'' so nahe als möglich einander gleich, und gleich der Einheit sind.

Es soll die X-axe in die Tangente des mittleren Meridians, die Y-axe senkrecht dazu angenommen werden. Berücksichtigt man nur die Glieder erster Ordnung, so wird die Abscisse gleich der Länge des Bogens im ersten Meridian, die Ordinate gleich dem Bogen des Parallels, also

$$X = v + G_2 + G_3 + \cdots$$
$$Y = pu + G_2 + G_3 + \cdots$$

wo die Glieder zweiter, dritter ... Ordnung symbolisch durch G_2, G_3 ... angedeutet sind.

Schreiben wir hiefür, mit unbestimmten Coefficienten behaftet

$$X = v + \alpha u^2 + 2\alpha' uv + \alpha'' v^2 + G_3$$
$$Y = pu + \beta'' u^2 + 2\beta' uv + \beta v^2 + G_3,$$

so wird

$$\frac{\partial X}{\partial u} = 2\alpha u + 2\alpha' v + G_2 \qquad \frac{\partial X}{\partial v} = 1 + 2\alpha' u + 2\alpha'' v + G_2$$
$$\frac{\partial Y}{\partial u} = p + 2\beta'' u + 2\beta' v + G_2 \quad \frac{\partial Y}{\partial v} = u\frac{\partial p}{\partial v} + 2\beta' u + 2\beta v + G_2$$

folglich

$$E = p^2 + 4\beta'' pu + 4\beta' pv + G_2$$
$$G = 1 + 4\alpha' u + 4\alpha'' v + G_2.$$

Sollen nun $\frac{E}{e}$, $\frac{G}{g}$ nahe 1 sein, so müssen in E, G die Glieder erster Ordnung verschwinden, wozu nötig ist, dass

$$\beta'' = \beta' = \alpha' = \alpha'' = 0$$

ist; dann wird

$$X = v + \alpha u^2 + G_3$$
$$Y = pu + \beta v^2 + G_3$$

$$F = 2\alpha u + p\frac{\partial p}{\partial v} \cdot u + 2\beta pv + G_2,$$

und man kann nun auch in F die Glieder erster Ordnung zum Verschwinden bringen. Es ist, wenn φ die geographische Breite bedeutet:

$$p = \frac{A \cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2}}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = - \frac{A \sin \varphi (1 - \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \frac{A (1 - \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

demzufolge

$$\frac{\partial p}{\partial v} = - \sin \varphi .$$

Dieser Wert unterscheidet sich von dem für den mittleren Parallel geltenden

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_0 = - \sin \varphi_0$$

nur um Grössen erster Ordnung, so dass

$$p \frac{\partial p}{\partial v} \cdot u = - p_0 \sin \varphi_0 \, u + G_2$$

ist. Man hat demnach den Ausdruck

$$(2 \alpha - p_0 \sin \varphi_0) \, u + 2 \beta p_0 v$$

zum Verschwinden zu bringen, was durch die Wahl von

$$\beta = 0, \quad \alpha = \frac{p_0 \sin \varphi_0}{2}$$

erreicht wird. Es wird also, wenn nun die Glieder dritter Ordnung mit unbestimmten Coëfficienten eingeführt werden:

$$X = v + \frac{p_0 \sin \varphi_0}{2} u^2 + a u^3 + 3 b u^2 v + 3 c u v^2 + d v^3$$
$$Y = p u + a' u^3 + 3 b' u^2 v + 3 c' u v^2 + d' v^3 ,$$

wo auf die Glieder 4. Ordnung nicht mehr Rücksicht genommen wird. Hieraus folgt:

$$\frac{\partial X}{\partial u} = p_0 \sin \varphi_0 \cdot u + 3 a u^2 + 6 b u v + 3 c v^2$$
$$\frac{\partial X}{\partial v} = 1 + 3 b u^2 + 6 c u v + 3 d v^2$$
$$\frac{\partial Y}{\partial u} = p + 3 a' u^2 + 6 b' u v + 3 c' v^2$$
$$\frac{\partial Y}{\partial v} = - \sin \varphi \cdot u + 3 b' u^2 + 6 c' u v + 3 d' v^2 ,$$

daher

$$E = p^2 + 6 a' p u^2 + 12 b' p u v + 6 c' p v^2 + p_0^2 \sin \varphi_0^2 u^2$$
$$F = p_0 \sin \varphi_0 u + 3 a u^2 + 6 b u v + 3 c v^2 - p \sin \varphi \cdot u + 3 b' p u^2 + 6 c' p u v + 3 d' p v^2$$
$$G = 1 + 6 b u^2 + 12 c u v + 6 d v^2 + \sin \varphi^2 \cdot u^2$$

und hiermit

$$k' = 1 + (3b + \tfrac{1}{2}\sin\varphi^2)\,u^2 + 6cuv + 3dv^2$$

$$k'' = 1 + \left(\frac{3a'}{p} + \sin\varphi_0{}^2\,\frac{p_0^2}{2p^2}\right)u^2 + \frac{6b'}{p}\,uv + \frac{3c'}{p}\,v^2$$

$$\cos\Theta = \frac{F}{k'k''p} = \frac{1}{k'k''}\left[\frac{p_0\sin\varphi_0 - p\sin\varphi}{p}\,u + \left(\frac{3a}{p} + 3b'\right)u^2 \right.$$
$$\left. + \left(\frac{6b}{p} + 6c'\right)uv + \left(\frac{3c}{p} + 3d'\right)v^2\right]$$

Nun sind k', k'' daher auch $\frac{1}{k'}$, $\frac{1}{k''}$ bis auf Grössen 2. Ordnung gleich der Einheit, daher, bis auf Grössen 3. Ordnung

$$\cos\Theta = \frac{p_0\sin\varphi_0 - p\sin\varphi}{p}\,u + \left(\frac{3a}{p} + 3b'\right)u^2 + \left(\frac{6b}{p} + 6c'\right)uv$$
$$+ \left(\frac{3c}{p} + 3d'\right)v^2.$$

Hier kann man weiter $p\sin\varphi$ in eine Reihe entwickeln, welche nach Potenzen von v fortschreitet[1]); es ist

$$p\sin\varphi = p_0\sin\varphi_0 + v\,\frac{\partial}{\partial v}\,(p\sin\varphi)$$

und

$$\frac{\partial\,(p\sin\varphi)}{\partial v} = \sin\varphi\,\frac{\partial p}{\partial v} + p\cos\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial v} = -\sin\varphi^2 + p\cos\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}$$

$$= -\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2\,\frac{1 - \varepsilon^2\sin\varphi^2}{1 - \varepsilon^2} = \frac{\cos 2\varphi + \varepsilon^2\sin\varphi^4}{1 - \varepsilon^2}$$

$$p\sin\varphi = p_0\sin\varphi_0 + \frac{\cos 2\varphi + \varepsilon^2\sin\varphi^4}{1 - \varepsilon^2}\,v.$$

Setzt man dies oben ein, so entsteht aus dem ersten Gliede

$$\frac{p_0\sin\varphi_0 - p\sin\varphi}{p}\cdot u = -\frac{\cos 2\varphi + \varepsilon^2\sin\varphi^4}{(1 - \varepsilon^2)\,p}\,uv,$$

welcher Ausdruck sich mit dem andern von uv abhängigen Gliede vereinigt.

Die von ε^2 abhängigen Glieder in den Ausdrücken *zweiter* Ordnung werden aber wegen der Kleinheit von ε mit den nicht betrachteten Gliedern dritter und höherer Ordnung zu vereinigen sein, was darauf hinauskömmt, in den Gliedern der noch in Rechnung gezogenen Glieder höchster Ordnung die Excentricität der Meridianellipse der Erde zu vernachlässigen. Denkt man sich ferner p nach Potenzen von v entwickelt, so würde

$$p = p_0 + \frac{\partial p}{\partial v}\,v,$$

wo aber in den angeschriebenen Gliedern zweiter Ordnung nur p_0 auftritt, und der zweite Theil wegen des Faktors v sich mit den nicht mehr in Betracht gezogenen Gliedern dritter Ordnung vereinigt; man hat folglich in den Gliedern zweiter Ordnung zu schreiben

$$p = p_0 = A\cos\varphi_0$$

1) Da p und φ nur von v nicht aber von u abhängen.

und erhält so:

$$k' = 1 + (3b + \tfrac{1}{2}\sin\varphi_0{}^2)\,u^2 + 6cuv + 3dv^2$$

$$k'' = 1 + \left(\frac{3a'}{p_0} + \tfrac{1}{2}\sin\varphi_0{}^2\right)u^2 + \frac{6b'}{p_0}\,uv + \frac{3c'}{p_0}\,v^2$$

$$\cos\Theta = \left(\frac{3a}{p_0} + 3b'\right)u^2 + \left(\frac{6b}{p_0} + 6c' - \frac{\cos 2\varphi_0}{p_0}\right)uv + \left(\frac{3c}{p_0} + 3d'\right)v^2.$$

Man kann jetzt leicht bewirken, dass sowol $\cos\Theta$ als auch $k' - k''$ nur mehr von der dritten Ordnung sind; dazu muss:

$$\begin{array}{ll} a' = bp_0 & a = -b'p_0 \\ b' = cp_0 & b + c'p_0 - \tfrac{1}{6}\cos 2\varphi_0 = 0 \\ c' = dp_0 & c = -d'p_0, \end{array}$$

sein, so dass von den 8 Constanten $a, b, c, d, a', b', c', d'$, nur zwei willkürlich bleiben. Es sollen jedoch der Einfachheit halber a, b, d beibehalten werden, zwischen denen dann notwendig eine Beziehung bestehen muss. Es ist

$$a' = bp_0;\quad b' = -\frac{a}{p_0};\quad c' = dp_0;\quad d' = -\frac{c}{p_0} = \frac{a}{p_0{}^3}$$

$$c = \frac{b'}{p_0} = -\frac{a}{p_0{}^2}$$

und hiermit

$$X = v + \frac{p_0\sin\varphi_0}{2}\,u^2 + au^3 + 3bu^2v - 3\,\frac{a}{p_0{}^2}\,uv^2 + dv^3$$

$$Y = pu + bp_0u^3 - 3\,\frac{a}{p_0}\,u^2v + 3dp_0uv^2 + \frac{a}{p_0{}^3}\,v^3,$$

wo zwischen den Constanten b und d die Beziehung besteht

$$b + dp_0{}^2 - \tfrac{1}{6}\cos 2\varphi_0 = 0,$$

und hiermit wird

$$k' = 1 + (3b + \tfrac{1}{2}\sin\varphi_0{}^2)\,u^2 - \frac{6a}{p_0{}^2}\,uv + 3dv^2 + G_3$$

$$k'' = 1 + (3b + \tfrac{1}{2}\sin\varphi_0{}^2)\,u^2 - \frac{6a}{p_0{}^2}\,uv + 3dv^2 + G_3'.$$

Die Längenänderungen sind demnach bis auf Grössen dritter Ordnung nach allen Richtungen dieselben, können aber selbst nicht auf Grössen dritter Ordnung gebracht werden, weil die Coefficienten von u^2 und v^2 nicht gleichzeitig zum Verschwinden gebracht werden können. Denn es ist

$$3b + \tfrac{1}{2}\sin\varphi_0{}^2 = \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi_0 - 3dp_0{}^2 + \tfrac{1}{2}\sin\varphi_0{}^2 = \tfrac{1}{2}\cos\varphi_0{}^2 - 3dp_0{}^2,$$

folglich, wenn die Glieder dritter Ordnung unberücksichtigt bleiben,

$$k = 1 + (\tfrac{1}{2}\cos\varphi_0{}^2 - 3dp_0{}^2)\,u^2 - \frac{6a}{p_0{}^2}\,uv + 3dv^2.$$

Hier sind nun drei Constanten, a, d, φ_0, über welche man noch so verfügen kann, dass der grösste Wert von k selbst möglichst klein werde. Zu diesem Zwecke führen wir nach *Tissot* zwei neue Constanten E, F ein, bestimmt durch die Gleichungen:

$$\operatorname{tg} E = \frac{3a}{p_0^3\left(3d - \frac{1}{4A^2}\right)}$$

$$\left(F - \frac{1}{4A^2}\right) = \left(3d - \frac{1}{4A^2}\right) \sec E,$$

so dass

$$3d - \frac{1}{4A^2} = \left(F - \frac{1}{4A^2}\right) \cos E$$

$$\frac{3a}{p_0^3} = \left(F - \frac{1}{4A^2}\right) \sin E.$$

Führt man ferner zwei neue Variable ξ, η ein durch die Gleichungen

$$\xi = v \cos \tfrac{1}{2} E - p_0 u \sin \tfrac{1}{2} E$$
$$\eta = v \sin \tfrac{1}{2} E + p_0 u \cos \tfrac{1}{2} E,$$

so dass

$$v = \xi \cos \tfrac{1}{2} E + \eta \sin \tfrac{1}{2} E$$
$$p_0 u = \eta \cos \tfrac{1}{2} E - \xi \sin \tfrac{1}{2} E,$$

so wird

$$\begin{aligned} k - 1 = {} & 3d\,[\xi^2 \cos \tfrac{1}{2} E^2 + 2\,\xi\eta \sin \tfrac{1}{2} E \cos \tfrac{1}{2} E + \eta^2 \sin \tfrac{1}{2} E^2] \\ & + \frac{3a}{p_0^3}\,[2\,\xi^2 \sin \tfrac{1}{2} E \cos \tfrac{1}{2} E - 2\xi\eta\,(\cos \tfrac{1}{2} E^2 - \sin \tfrac{1}{2} E^2) \\ & - 2\eta^2 \sin \tfrac{1}{2} E \cos \tfrac{1}{2} E] \\ & - 3d\,[\xi^2 \sin \tfrac{1}{2} E^2 - 2\eta\xi \sin \tfrac{1}{2} E \cos \tfrac{1}{2} E + \eta^2 \cos \tfrac{1}{2} E^2] \\ & + \tfrac{1}{2}\,\frac{\cos \varphi_0^2}{p_0^2}\,[\xi^2 \sin \tfrac{1}{2} E^2 - 2\,\xi\eta \sin \tfrac{1}{2} E \cos \tfrac{1}{2} E + \eta^2 \cos \tfrac{1}{2} E^2] \end{aligned}$$

und da

$$p_0 = A \cos \varphi_0$$

$$\begin{aligned} k - 1 = {} & \xi^2 \left[3d \cos E + \frac{3a}{p_0^3} \sin E + \frac{1}{4A^2}(1 - \cos E)\right] \\ & + 2\xi\eta \left[3d \sin E - \frac{3a}{p_0^3} \cos E - \frac{1}{4A^2} \sin E\right] \\ & + \eta^2 \left[- 3d \cos E - \frac{3a}{p_0^3} \sin E + \frac{1}{4A^2}(1 + \cos E)\right] \\ = {} & \xi^2 \left[\left(3d - \frac{1}{4A^2}\right) \cos E + \frac{3a}{p_0^3} \sin E + \frac{1}{4A^2}\right] \\ & + 2\,\xi\,\eta \left[\left(3d - \frac{1}{4A^2}\right) \sin E - \frac{3a}{p_0^3} \cos E\right] \\ & + \eta^2 \left[-\left(3d - \frac{1}{4A^2}\right) \cos E - \frac{3a}{p_0^3} \sin E + \frac{1}{4A^2}\right], \end{aligned}$$

folglich

$$k - 1 = F\xi^2 + \left(\frac{1}{2A^2} - F\right) \eta^2 = \varkappa.$$

$\varkappa$ ist nun die Änderung der Längeneinheit. Dieselbe ist constant für alle Punkte, für welche ξ und η der obigen Gleichung genügen. Da aber v und $p_0 u$ genähert als die rechtwinkligen Coordinaten angesehen werden können, so dass, wenn man

$$x = v$$
$$y = p_0 u$$

setzt, genähert $X = x$, $Y = y$ sein wird, so hat man

$$\left.\begin{aligned}\xi &= x \cos \tfrac{1}{2} E - y \sin \tfrac{1}{2} E\\ \eta &= x \sin \tfrac{1}{2} E + y \cos \tfrac{1}{2} E\end{aligned}\right\}, \qquad \text{(m)}$$

woraus man ersieht, dass ξ, η die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes x, y sind, bezogen auf ein Axensystem, welches gegen das ursprüngliche so gedreht ist, dass dessen ξ-Axe mit der Axe der x den Winkel $\frac{1}{2} E$ gegen die negative Y-Axe hin einschliesst (Fig. 61). Punkte gleicher Längenänderung liegen also auf Ellipsen.[1]) Ist $\varDelta$ derjenige Halbmesser einer solchen Ellipse, dessen Neigung gegen die ξ- und η-Axe 45^0 ist, so ist

Fig. 61.

$$\xi = \frac{\varDelta}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{\varDelta}{\sqrt{2}},$$

folglich

$$\frac{F\varDelta^2}{2} + \left(\frac{1}{2A^2} - F\right)\frac{\varDelta^2}{2} = \varkappa,$$

woraus

$$\varkappa = \frac{\varDelta^2}{4A^2} = \left(\frac{\varDelta}{2A}\right)^2$$

folgt. Die Hälfte des Verhältnisses des unter 45 gegen die Axen der Ellipse geneigten Halbmessers derselben zu der constanten Halbaxe der Meridianellipse giebt also gleichzeitig den Wert der Längenänderung in allen Punkten dieser Ellipse; dies giebt nun eine einfache Methode zur Bestimmung der günstigsten Projektion.

Denken wir uns für F einen Wert gewählt; construiert man in einem beliebigen, kleinen Massstabe das darzustellende Land, und ferner eine Reihe von Ellipsen verschiedener Grösse, für welche sich die Axen verhalten wie $\sqrt{F : \left(\frac{1}{2A^2} - F\right)}$. Legt man dieselben, eine nach der anderen auf das darzustellende Land, so wird es unter allen Ellipsen, von denen einige ganz innerhalb desselben fallen, andere

1) Oder Hyperbeln jenachdem $F < \frac{1}{2A^2}$ oder $> \frac{1}{2A^2}$; die Axe in der Richtung der X hat die Länge $\sqrt{\frac{\varkappa}{F}}$; in der Richtung der η: $\sqrt{\frac{\varkappa}{\frac{1}{2A^2} - F}}$.

dasselbe in weitem Bogen überspannen, eine geben, welche von den das Land bei beliebiger Drehung jeder einzelnen umziehenden die kleinste ist, diese nennt *Tissot Grenzellipse (ellipse limite)*. Legt man die anderen, kleineren Ellipsen, denen dasselbe Axenverhältnis $\sqrt{F : \left(\frac{1}{2A^2} - F\right)}$ zukommt, concentrisch und coaxial auf, so wird jede ein Stückchen vom darzustellenden Lande wegschneiden; jede dieser Ellipsen ist der geometrische Ort von Punkten mit derselben Vergrösserung, deren Grösse durch den unter 45^0 zu den Axen gemessenen Durchmesser charakterisiert ist. Offenbar ist dieser Durchmesser für die Grenzellipse ein Maximum für sämmtliche dargestellten Punkte; ist dessen Wert $2\varDelta_0$, so wird $2\varDelta_0$ die *Charakteristik* der Projektion für den angenommenen Wert von F und die angenommene Lage der Axen sein. E bestimmt sich hiefür durch den Winkel, welchen die Axe der Ellipse mit der Richtung der Meridiane einschliesst und φ_0 ist die Breite des Mittelpunktes der Ellipse, denn beim Übergang von den Coordinaten x (v), y $(p_0 u)$ zu den ξ, η, wurde nur eine Drehung des Axensystems um den Kartenmittelpunkt vorgenommen.

Nun lege man dem F verschiedene Werte bei,[1]) etwa $\frac{0{\cdot}1}{A^2}, \frac{0{\cdot}2}{A^2}, \frac{0{\cdot}3}{A^2}$, zeichne für *jeden* Wert im Massstabe der Hilfskarte ein System von concentrischen, coaxialen Ellipsen für dasselbe Axenverhältnis $\sqrt{F : \left(\frac{1}{2A^2} - F\right)}$ auf je einem Blatte. Jedes Blatt wird dann auf den darzustellenden Flächentheil der Hilfskarte gelegt, so lange verschoben und gedreht, bis man die möglichst kleinste Grenzellipse erhält (denn für jede Lage wird es eine andere Grenzellipse geben) und für diese die Werte von $\varDelta_0$, E und die Lage des Ellipsenmittelpunktes notiert. Von allen den Systemen, die zu den verschiedenen F gehören, behält man schliesslich jenes bei, für welches $\varDelta_0$ den kleinsten Wert hat; das System, aus dem es entnommen ist, giebt den Wert von F, die Lage des Systemes die Werte von E und φ_0. Man kann F leicht aus dem Axenverhältnis direkt erhalten, denn ist dieses G, so ist

$$\frac{\frac{1}{2A^2} - F}{F} = G^2$$

und daraus

$$F = \frac{1}{2A^2(G^2 + 1)}.$$

Mit diesen Werten von F, E und φ_0 findet man dann a, d und b, welche Grössen in die Ausdrücke für X, Y substituiert die zur definitiven Kartenzeichnung zu verwendenden Coordinaten bestimmen.

Wenn $F > \frac{1}{2A^2}$, so werden die Linien gleicher Vergrösserung

1) A kann dabei als Einheit angenommen werden.

Hyperbeln, so dass für zwei zusammengehörige Äste die Längenänderung dieselbe ist, aber entgegengesetzt bezeichnet. Verfährt man nun mit diesen Werten von F ebenso, so ergeben sich auch hiefür Werte von $\varDelta_0$, so dass $\varDelta_0 = 2A\sqrt{\varkappa}$; sollen aber diese mit den für die Ellipsen geltenden vergleichbar sein, so müssen sie mit $\sqrt{2}$ multipliziert werden. Für eine Ellipse haben nämlich die beiden Endpunkte des Durchmessers $\varDelta_0$ die Vergrösserung

$$\varkappa = \left(\frac{\varDelta_0}{2A}\right)^2,$$

welches den grössten Wert der auf der Karte vorkommenden Vergrösserung giebt. Für die Hyperbel haben die Punkte des einen Astes die Vergrösserung $\varkappa$, die des andern $-\varkappa$, die gesammte Längenänderung ist also

$$\varkappa' = 2\varkappa = 2\left(\frac{\varDelta_0'}{2A}\right)^2 = \left(\frac{\varDelta_0'\sqrt{2}}{2A}\right)^2,$$

daher durch denselben Massstab wie bei den Ellipsen dargestellt $\varDelta_0'\sqrt{2}$. Endlich ist es möglich, dass die Determinante des Ausdruckes für $k - 1$

$$\left(\frac{3a}{p_0^2}\right)^2 - 3d\left(\tfrac{1}{4}\cos\varphi_0^2 - 3d\,p_0^2\right) = 0$$

ist; substituiert man hier die Werte in F und E, so entsteht aus dieser Gleichung

$$F^2 - \frac{F}{2A^2} = 0,$$

was für $F = 0$, oder $F = \frac{1}{2A^2}$ der Fall ist; in diesen beiden Fällen wird

$$\varkappa = \frac{\eta^2}{2A^2}$$

oder

$$\varkappa = \frac{\xi^2}{2A^2}.$$

Es ist also nicht möglich, dass die Punkte gleicher Längenänderung auf eigentlichen Parabeln liegen.[1]) Wird die obige Determinante Null, so sind die Linien gleicher Längenänderung Geradenpaare; diejenigen, welche das darzustellende Land im geringsten Abstande (unter den in verschiedenen Richtungen gezogenen) einschliessen, bestimmen die Werte von E und φ_0; die Hälfte der unter einem Winkel von 45^0 zu denselben gezogenen Geraden (ihr halber Abstand ist nämlich ξ oder η; die Länge der genannten Geraden, z. B. für den ersten Fall $\varDelta = \xi\sqrt{2}$; also $\xi = \frac{\varDelta}{\sqrt{2}}$; $\varkappa = \frac{\varDelta^2}{4A^2} = \left(\frac{\varDelta}{2A}\right)^2$) giebt das zur Vergleichung zu benutzende Mass für $\varDelta_0$.

---

1) Dies übersieht *Tissot*.

Um die Vorzüglichkeit der nach dieser Projektion angefertigten Karten zu ersehen, mögen die folgenden von *Tissot* (l. c. pag. 60) angegebenen Zahlen dienen: Für die vom Dépot de la guerre angefertigte Karte von Frankreich (in der *Mercator*'schen äquivalenten Projektion) ist die grösste Winkeländerung 18′; die grösste Längenänderung $\frac{1}{380}$; diese Zahlen wären bez. 10′ 30″ und $\frac{1}{650}$ geworden, wenn man als mittleren Parallel statt denjenigen von 45⁰ Breite, denjenigen von 46⁰ 30′ Breite genommen hätte. Sie wären aber nur 25″ und $\frac{1}{1100}$ geworden, wenn man

$$d = 0{\cdot}102; \qquad b = -0{\cdot}069; \qquad \varphi_0 = 41^0\, 30'$$

gesetzt hätte.[1])

47. *Spezielle Fälle.* *a*) Findet sich aus dieser Untersuchung, dass $\frac{1}{2}E$ nahe $= 0$ oder 90^0 ist, so wird es stets genügen $E = 0$ oder 180^0 anzunehmen, um die Formeln zu vereinfachen; es wird nämlich für $E = 0$

$$a = 0, \quad 3d = F, \quad b = \tfrac{1}{6}\cos 2\varphi_0 - \tfrac{1}{3}Fp_0^2,$$

folglich

$$X = v + \frac{p_0 \sin \varphi_0}{2}u^2 + 3bu^2v + dv^3$$

$$Y = pu + bp_0u^3 + 3dp_0uv^2$$

$$k = 1 + (\tfrac{1}{2}\cos\varphi_0^2 - 3dp_0^2)\,u^2 + 3dv^2.$$

Hier ist noch d oder F willkürlich.

b) Nimmt man $E = 0$, und ausserdem $d = 0$, also $F = 0$, so wird

$$X = v + \frac{p_0 \sin \varphi_0}{2}u^2 + \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi_0\, u^2v$$

$$Y = pu + \tfrac{1}{6}p_0\cos 2\varphi_0 u^3$$

$$k = 1 + \tfrac{1}{2}\cos\varphi_0^2u^2.$$

Man sieht aus dem Ausdrucke für k, dass für constante u, also längs eines Meridians die Vergrösserung k dieselbe ist. Selbstverständlich wird man auch hier $F = 0$ wählen, wenn auch die oben beschriebene Untersuchung einen nicht verschwindenden, aber sehr kleinen Wert ergiebt, weil die Vereinfachung nicht unbedeutend ist, und die Karte an Güte nicht wesentlich verliert.

Da k längs der Meridiane constant, und für kleine u unbedeutend ist, so wird sich diese Darstellung jedenfalls besonders gut eignen, für Länder, die sich über weitere Strecken in der Richtung der Meridiane ausdehnen, ohne eine bedeutende Ausdehnung in der Richtung der Parallelen zu haben. In der That zeigen die Werte $\frac{1}{2}E = 0$,

1) *Tissot* hat

$$A = 0{\cdot}306, \qquad C = -0{\cdot}368;$$

es ist aber

$$d = \frac{A}{3}; \qquad b = -\frac{Cp_0^2}{3}.$$

$F = 0$, dass die Ξ-Axe mit der X-Axe zusammenfällt (also in der Richtung der Meridiane) und die zugehörige Axe der Grenzellipse unendlich (jedenfalls sehr gross) ist, also das darzustellende Land sich in der Richtung des Meridians erstreckt.

Ist die Breite des mittleren Parallels 45°, so werden die Formeln

$$X = v + \frac{p_0}{2\sqrt{2}} u^2$$
$$Y = pu$$
$$k = 1 + \tfrac{1}{4} u^2.$$

c) Ist das Land sehr ausgedehnt in der Richtung der Parallelen, so wird man *entweder* die Ξ-Axe mit der Y-axe zusammenfallen lassen, und F gleich (oder nahe) Null annehmen, damit die grosse Axe in der Richtung der Parallelen fällt, *oder* die Ξ-Axe mit der X-Axe coincidieren lassen, und $F = \frac{1}{2A^2}$ setzen, wodurch dasselbe erzielt wird. Im ersteren Falle ist $\frac{1}{2} E = 90°$, $E = 180°$, also

$$a = 0, \quad 3d = \frac{1}{2A^2} - F$$

und für $F = 0$

$$3d = \frac{1}{2A^2}$$
$$b = \tfrac{1}{6} \cos 2\varphi_0 - \frac{p_0^2}{6A^2} = - \tfrac{1}{6} \sin \varphi_0^2.$$

Im zweiten Falle hat man

$$\tfrac{1}{2} E = 0, \; E = 0, \text{ und } F = \frac{1}{2A^2},$$

also

$$a = 0, \quad 3d = F = \frac{1}{2A^2}, \text{ und } b = -\tfrac{1}{6} \sin \varphi_0^2,$$

also dieselben Werte, und es wird:

$$X = v + \frac{p_0 \sin \varphi_0}{2} u^2 - \tfrac{1}{2} \sin \varphi_0^2 u^2 v + \frac{1}{6A^2} v^3$$
$$Y = pu - \tfrac{1}{6} p_0 \sin \varphi_0^2 u^3 + \frac{p_0}{2A^2} uv^2$$
$$k = 1 + \frac{1}{2A^2} v^2.$$

Dieses System kann man noch in einer anderen Form schreiben. Es ist nämlich

$$p = p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_0 v + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_0 v^2$$

und

$$\frac{\partial p}{\partial v} = - \sin \varphi, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = - \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} = - \frac{\cos \varphi}{A}$$

wenn die Excentricität ε in den Gliedern dritter Ordnung (da p mit u multipliciert wird) vernachlässigt wird; daher

$$p = p_0 - \sin \varphi_0 v - \frac{\cos \varphi_0}{A} v^2.$$

Setzt man dies in Y ein, und geht wieder nur bis zu den Gliedern dritter Ordnung, so wird

$$Y = p_0 u - \sin\varphi_0 uv - \tfrac{1}{6} p_0 \sin\varphi_0^2 u^3 - \frac{\cos\varphi_0}{2A} uv^2.$$

Setzt man nun

$$R_0 = p_0 \operatorname{cosec}\varphi_0$$
$$R = R_0 - v - \frac{1}{6A^2} v^3$$
$$n = u \sin\varphi_0,$$

so wird

$$R \sin n = \left(R_0 - v - \frac{1}{6A^2} v^3\right)\left(u \sin\varphi_0 - \tfrac{1}{6} u^3 \sin\varphi_0^3\right)$$
$$= R_0 u \sin\varphi_0 - uv \sin\varphi_0 - \tfrac{1}{6} R_0 u^3 \sin\varphi_0^3$$
$$= p_0 u - \sin\varphi_0 uv - \tfrac{1}{6} p_0 \sin\varphi_0^2 u^3 = Y + \frac{\cos\varphi_0}{2A} uv^2$$

$$R_0 - R\cos n = R_0 - \left(R_0 - v - \frac{1}{6A^2} v^3\right)\left(1 - \tfrac{1}{2} u^2 \sin\varphi_0^2\right)$$
$$= v + \frac{1}{6A^2} v^3 - \tfrac{1}{2} vu^2 \sin\varphi_0^2 + \tfrac{1}{2} p_0 u^2 \sin\varphi_0 = X.$$

Gestattet man sich noch das Glied $\frac{\cos\varphi_0}{2A} uv^2$ wegzulassen, so wird

$$X = R_0 - R\cos n$$
$$Y = R \sin n,$$

wo R nur von der Breite v, n nur von der Länge u abhängt. Die Gleichung der Meridiane wird daher

$$Y = (R_0 - X) \operatorname{tg} n;$$

die Gleichung der Parallelen

$$Y^2 + (R_0 - X)^2 = R^2.$$

Die Meridiane sind also gerade Linien, die von einem Punkte ausgehen, der in der Y-Axe liegt, und dessen Abstand vom Ursprung $X = R_0$ ist, und welcher daher den Pol repräsentiert; die Parallelkreise der Karte sind concentrische Kreise, deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt die Coordinaten $X = R_0$, $Y = 0$ hat, also der Pol ist, und deren Halbmesser durch $R = R_0 - v - \frac{1}{6A^2} v^3$ gegeben ist. Der Abstand eines Parallels vom mittleren Parallel ist hiernach $R_0 - R = v + \frac{1}{6A^2} v^3$. Die Projektion wird demnach identisch mit einer Kegelabwicklung, wo der Kegel im mittleren Parallel berührt, und die Abstände der Parallelen gleich sind den Bögen des Meridians, vermehrt um $\frac{1}{6}$ der dritten Potenz dieser Abstände. Wir wollen diese Projektion daher auch die *Kegelprojektion von Tissot* nennen.

Um auch einen Massstab für die Güte der unter (*b*) und (*c*) angeführten Projektionen zu haben, sollen hier einige von *Tissot* in den

Comptes rendus Bd. 51 (Jhrg. 1860) pag. 968 mitgetheilte Zahlen angeführt werden.

Eine Karte von Egypten nach der *Mercator*'schen äquivalenten Projektion angefertigt würde als grösste Winkeländerung 25″, als grösste Längenänderung $\frac{1}{250}$ geben; nach den Formeln in (c) wären diese Zahlen auf 5″, resp. $\frac{1}{2000}$ herabgemindert. Für eine Karte von Algier in der ersteren Projektion wären diese Zahlen 11′ und $\frac{1}{600}$; in der zweiten resp. 3″ und $\frac{1}{2000}$.

Nach *Zöppritz* (Leitfaden der Kartenentwurfslehre, pag. 110) würde die Darstellung einer zwischen den zwei Parallelkreisen von $37\frac{1}{2}^0$ und $52\frac{1}{2}^0$ Breite enthaltenen Zone, die das südliche Mitteleuropa umfasst, in der *Tissot*'schen Kegelprojektion als Maximaländerungen der Winkel und Längen 1′ 20″ und $\frac{1}{230}$ geben, während die *Mercator*'sche äquivalente Projektion statt dessen 14^0 40′ und $\frac{1}{7}$ giebt. Für ein Zweieck von 15^0 Längendifferenz würde eine nach den Formeln in (b) gezeichnete Karte die Maximaländerungen von 1′ 20″ und $\frac{1}{230}$ zeigen, während die *Mercator*'sche äquivalente Projektion 7^0 30′ und $\frac{1}{15}$ giebt.

Damit ist nun der von *Zöppritz* (l. c. pag. 111) ausgesprochene Satz: „Diesen Thatsachen gegenüber hat die *Bonne*'sche Projektion (eigentlich die *Mercator*'sche äquivalente) keine Anwendungsberechtigung mehr, weder für Karten grösserer, noch für solche kleinerer Gebiete“ völlig gerechtfertigt. Mit Vortheil könnte sie nur dort verwendet werden, wo die Eigenschaft der Äquivalenz gefordert wird.

48. Gehen wir nun wieder zu den Gleichungen (8) zurück. Ist dort

$$E = \varkappa^2 e, \quad F = \varkappa^2 f, \quad G = \varkappa^2 g, \tag{27}$$

so wird

$$\frac{dS}{ds} = \varkappa$$

und dann ist $\varkappa$ geradezu das Vergrösserungsverhältnis in dem betrachteten Punkte, also unabhängig von der Richtung des Fortschreitens, d. h. nach allen Richtungen dasselbe. Wenn dann noch $\varkappa$ constant ist, in welchem Falle man dafür auch die Einheit setzen kann,[1]) so werden die unendlich kleinen Theile der beiden Flächen Stelle für Stelle congruent und können daher zur Deckung gebracht werden, in welchem Falle man sagt, dass die beiden Flächen auf einander *abwickelbar* seien.

Allein die Bedingung (27) ist *hinreichend* dafür, dass eine Abbildung conform sei, aber durchaus *nicht notwendig*; denn es ist ja möglich, dass nur eine falsche Wahl der u–, v-Linien es mit sich

---

1) Denn setzt man $X = \varkappa X'$; $Y = \varkappa Y'$; $Z = \varkappa Z'$, so wird $dS = \varkappa dS'$, daher $\frac{dS'}{ds} = 1$. Diess kömmt aber darauf hinaus, statt der einen Fläche ein ihr völlig ähnliches verkleinertes Abbild zu betrachten.

bringt, dass selbst bei abwickelbaren Flächen jene Bedingung nicht erfüllt ist.[1]) Wir gehen daher jetzt wieder zu den Gleichungen (5), (5a) zurück, deren Variable u, v, U, V durch die Gleichungen (6) mit einander verbunden sind. Sollen bei einer conformen Abbildung die beiden Linienschaaren der u- und v-Linien einander entsprechen, so ist zunächst nötig, dass sie in den einander entsprechenden Punkten mit einander gleiche Winkel einschliessen, weil dies bei conformen Abbildungen überhaupt stattfinden muss. Um diese Bedingung mathematisch zu präcisieren, gehen wir von den Schaaren der u-, v-Linien, wenn nicht $f = 0$ wäre, in welchem Falle die beiden Schaaren sich rechtwinklig durchschneiden würden, auf ein anderes System über, welches diese Bedingung erfüllt. Wir schreiben zu diesem Behufe

$$e du^2 + 2f du dv + g dv^2 = \frac{1}{e}\left[(e du + f dv)^2 + (eg - f^2)\, dv^2\right].$$

Da aber

$$\begin{aligned} eg - f^2 &= (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2 \\ &= (ab' - a'b)^2 + (ac' - a'c)^2 + (bc' - b'c)^2, \end{aligned}$$

also, als Summe dreier Quadrate, eine stets positive Grösse ist, so wird man $\sqrt{eg - f^2}$ als stets reelle Grösse zu betrachten haben. Ist es nun möglich, ein Liniensystem u, v so zu bestimmen, dass

$$\left.\begin{aligned} e du + f dv &= \sqrt{m}\, du_1 \\ \sqrt{eg - f^2}\, dv &= \sqrt{m}\, dv_1 \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

ist, so würde

$$ds^2 = \frac{m}{e}(du_1^2 + dv_1^2). \qquad (29)$$

Ebenso könnte man für die zweite Fläche

$$\left.\begin{aligned} E dU + F dV &= \sqrt{M}\, dU_1 \\ \sqrt{EG - F^2}\, dV &= \sqrt{M}\, dV_1 \end{aligned}\right\} \qquad (28\text{a})$$

substituieren, und hätte dann

$$dS^2 = \frac{M}{E}(dU_1^2 + dV_1^2), \qquad (29\text{a})$$

so dass das Vergrösserungsverhältnis k sich bestimmt aus:

$$k^2 = \left(\frac{dS}{ds}\right)^2 = \frac{Me}{mE}\,\frac{dU_1^2 + dV_1^2}{du_1^2 + dv_1^2}. \qquad (30)$$

Sind die Gleichungen (28) und (28a) erfüllt, so ist, wie aus (30) zu ersehen ist, der Bedingung genügt, dass die beiden Linienschaaren in beiden Flächen sich rechtwinklig schneiden, d. h. einander ent-

---

1) Man braucht z. B. nur bei dem einen Rotationsellipsoid die Meridiane als u-Linien, bei dem anderen als v-Linien zu betrachten, und die Gleichungen werden selbst für dieselben Werte von A und ε, also für congruente Ellipsoide nicht mehr erfüllt sein.

sprechende Systeme einer conformen Abbildung sein können. Es handelt sich nun zunächst darum, ob und wie man die Gleichungen 28 (und 28 a) erfüllen könne. Aus denselben folgt aber

$$(edu + fdv)^2 + (eg - f^2)\,dv^2 = m\,(du_1{}^2 + dv_1{}^2),$$

oder

$$(edu + fdv + i\sqrt{eg - f^2}\,dv)\,(edu + fdv - i\sqrt{eg - f^2}\,dv) = m\,(du + idv)\,(du - idv),$$

wo i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ bezeichnet.

Angenommen es sei

$$(\mu + \nu i)\,[edu + (f + i\sqrt{eg - f^2})\,dv] = d\eta + id\omega,$$

also ein vollständiges Differential, d. h. $\mu + \nu i$ der integrierende Faktor der Differentialgleichung

$$edu + (f + i\sqrt{eg - f^2})\,dv = 0, \tag{31}$$

dann wird auch

$$(\mu - \nu i)\,[edu + (f - i\sqrt{eg - f^2})\,dv] = d\eta - id\omega,$$

folglich durch Multiplikation

$$(\mu^2 + \nu^2)\,[edu + (f + i\sqrt{eg - f^2})\,dv] \times [edu + (f - i\sqrt{eg - f^2})\,dv] = d\eta^2 + d\omega^2.$$

Demnach sind η, ω mit u_1, v_1 identisch und es ist

$$m = \frac{1}{\mu^2 + \nu^2} \tag{32}$$

Hat man also den integrierenden Faktor der Differentialgleichung (31), so erhält man sofort die gewünschte Transformation. Man wird demnach im allgemeinen Falle die Gleichung (31) (auf irgend eine Art) integrieren, das vollständige Integral nach beiden Variabeln (also total) differenzieren; die Vergleichung des Differentiationsresultates mit (31) lehrt den integrierenden Faktor $(\mu + \nu i)$ kennen, und die Gleichung (32) liefert dann den Wert von m. Dasselbe macht man im allgemeinen mit der Gleichung

$$EdU + (F + i\sqrt{EG - F^2})\,dV = 0. \tag{31a}$$

Das totale Differentiale ihres Integrals verglichen mit dieser Gleichung selbst giebt den Wert des integrierenden Faktors $M + Ni$, und dann wird

$$M = \frac{1}{M^2 + N^2}\,. \tag{32a}$$

Die Gleichung (30) endlich giebt dann das Vergrösserungsverhältnis. Wenn man in dieser Gleichung die u-, v-Linien der beiden Flächen als einander entsprechende ansieht, d. h. wenn man

$$du_1 = dU_1; \qquad dv_1 = dV_1;$$

oder

$$du_1 = dV_1; \qquad dv_1 = dU_1$$

setzt, so wird

$$k^2 = \frac{Me}{Em}, \tag{30a}$$

also das Vergrösserungsverhältnis unabhängig von der Richtung, die Abbildung conform.

Daraus ergiebt sich also, dass man eine conforme Abbildung der einen Fläche auf eine zweite erhält, wenn man auf sich rechtwinklig schneidende Schaaren von u-, v-Linien übergehend, diese mit einander identificiert; das Vergrösserungsverhältnis wird dann gegeben durch den Ausdruck (30a). Allein es ist diess nicht die einzig mögliche Art der conformen Abbildung der beiden Flächen aufeinander; um die anderen Abbildungen dieser Art zu finden, bemerken wir, dass, wie immer dieselben beschaffen sein mögen, man immer die U_1, V_1 der zweiten Fläche als Funktionen der u_1, v_1 der ersten Fläche betrachten kann, d. h. es wird analog mit (6):

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= F_1\,(u_1 v_1) \\ V_1 &= F_2\,(u_1 v_1) \end{aligned}\right\}. \tag{33}$$

Einem Punkte u_1, v_1 der einen Fläche entspricht dann ein Punkt U_1, V_1 der anderen Fläche, aber einer u_1-Linie der ersteren entspricht nicht mehr eine U_1-Linie der zweiten, sondern der Linie $u_1 = c$ entspricht der Punktecomplex, für welchen

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= F_1\,(c, v_1) \\ V_1 &= F_2\,(c, v_1) \end{aligned}\right\}.$$

ist. Die Frage, wie man die Funktionen F_1, F_2 zu wählen hat, damit die Abbildung eine conforme werde, lässt sich also auch so aussprechen: Welche Linien der zweiten Fläche hat man den u_1- und v_1-Linien der ersten Fläche und umgekehrt zuzuordnen, damit die Abbildung eine conforme werde. Wegen der Conformität werden sich aber die zugeordneten Linien wieder rechtwinklig schneiden müssen; man könnte sie daher wieder als sich rechtwinklig sehneidende U_1-, V_1-Linien der zweiten Fläche auffassen, und man hätte auch eine andere dieser Gruppen erhalten, wenn man an Stelle von m, M andere Multiplikatoren der Differentialgleichungen (31), (31a) gewählt hätte.[1])

1) Jede Differentialgleichung oder jedes System von Differentialgleichungen hat nämlich, wenn es einen Multiplikator giebt, deren unendlich viele. Ist für eine lineare Differentialgleichung

$$P\,dx + Q\,dy = 0$$

M ein Multiplikator und $f(x,y) = 0$ ein Integral, so wird $M' = M f\,(x,y)$ ebenfalls ein Multiplikator sein, und daher wird es unendlich viele Multiplicatoren M' geben.

Es ist nämlich

$$d\,f\,(xy) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = PMdx + QMdy,$$

also

$$PM = \frac{\partial f}{\partial x}; \qquad QM = \frac{\partial f}{\partial y},$$

Aus (33) folgt

$$dU_1 = \frac{\partial U_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial U_1}{\partial v_1} dv_1$$

$$dV_1 = \frac{\partial V_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial V_1}{\partial v_1} dv_1,$$

daher

$$k^2 = \frac{\frac{Me}{Em}\left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_1}{\partial u_1}\right)^2\right] du_1^2 + 2\left[\frac{\partial U_1}{\partial u_1}\frac{\partial U_1}{\partial v_1} + \frac{\partial V_1}{\partial u_1}\frac{\partial V_1}{\partial v_1}\right] du_1 dv_1 + \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial v_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_1}{\partial v_1}\right)^2\right] dv_1^2}{du_1^2 + dv_1^2}$$

und soll dieser Ausdruck von dem Quotienten $\frac{dv_1}{du_1}$ unabhängig sein, so muss:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial U_1}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_1}{\partial u_1}\right)^2 = \left(\frac{\partial U_1}{\partial v_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_1}{\partial v_1}\right)^2 = W^2 \\ \frac{\partial U_1}{\partial u_1}\frac{\partial U_1}{\partial v_1} + \frac{\partial V_1}{\partial u_1}\frac{\partial V_1}{\partial v_1} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

und dann wird das Vergrösserungsverhältnis:

$$k^2 = \frac{Me}{Em} \cdot W^2. \tag{35}$$

Aus der zweiten Gleichung (34) folgt:

$$\frac{\frac{\partial U_1}{\partial u_1}}{\frac{\partial V_1}{\partial u_1}} = -\frac{\frac{\partial V_1}{\partial v_1}}{\frac{\partial U_1}{\partial v_1}}.$$

Setzt man diesen Quotienten $= \alpha$, welche Grösse nicht constant zu sein braucht, so wird:

$$\frac{\partial U_1}{\partial u_1} = \alpha \frac{\partial V_1}{\partial u_1}$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial v_1} = -\alpha \frac{\partial U_1}{\partial v_1}$$

---

demnach die Bedingung für den Multiplikator

$$\frac{\partial (PM)}{\partial y} = \frac{\partial (QM)}{\partial x},$$

oder entwickelt

$$P\frac{\partial M}{\partial y} - Q\frac{\partial M}{\partial x} - M\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0$$

Ist nun

$$M' = Mf(x\,y),$$

so wird

$$\Phi = P\frac{\partial M'}{\partial y} - Q\frac{\partial M'}{\partial x} - M'\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$= f(x, y)\left[P\frac{\partial M}{\partial y} - Q\frac{\partial M}{\partial x} - M\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] + M\left[P\frac{\partial f}{\partial y} - Q\frac{\partial f}{\partial x}\right].$$

Der erste Ausdruck rechts verschwindet, weil M ein Multiplikator ist, also ist

$$\Phi = M\frac{\partial f}{\partial y}\left[P - Q\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}\right] = M\frac{\partial f}{\partial y}\left[P + Q\frac{dy}{dx}\right] = 0,$$

also M' auch ein Multiplikator. Siehe übrigens hiefür auch *Jacobi*'s Theorie des letzten Multiplikators für Systeme von Differentialgleichungen in dessen „Vorlesungen über Dynamik“, 12. bis 14. Vorlesung.

und dieses in die erste Gleichung (34) eingesetzt giebt:

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial u_1}\right)^2 + \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial u_1}\right)^2 = W^2 \qquad \left(\frac{\partial U_1}{\partial v_1}\right)^2 + \alpha^2\left(\frac{\partial U_1}{\partial v_1}\right)^2 = W^2$$

$$\alpha^2\left(\frac{\partial V_1}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_1}{\partial u_1}\right)^2 = W^2 \qquad \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\partial V_1}{\partial v_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_1}{\partial v_1}\right)^2 = W^2,$$

woraus sich

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial u_1}\right)^2 = \left(\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}\right) W^2 \qquad \left(\frac{\partial U_1}{\partial v_1}\right)^2 = \frac{W^2}{1+\alpha^2}$$

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial u_1}\right)^2 = \frac{W^2}{1+\alpha^2} \qquad \left(\frac{\partial V_1}{\partial v_1}\right)^2 = \left(\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}\right) W^2,$$

oder endlich

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial u_1}\right)^2 = \left(\frac{\partial V_1}{\partial v_1}\right)^2$$

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial u_1}\right)^2 = \left(\frac{\partial U_1}{\partial v_1}\right)^2$$

ergiebt. Zieht man hieraus die Quadratwurzel, so folgt

$$\frac{\partial V_1}{\partial v_1} = \pm \frac{\partial U_1}{\partial u_1}; \qquad \frac{\partial U_1}{\partial v_1} = \mp \frac{\partial V_1}{\partial u_1}; \tag{36}$$

wobei die Zeichen, vorläufig wenigstens, beliebig miteinander combiniert werden können. Substituiert man aber die Ausdrücke (36) in die zweite der Differentialgleichungen (34), so erhält man

$$\mp \frac{\partial U_1}{\partial u_1}\frac{\partial V_1}{\partial u_1} \pm \frac{\partial U_1}{\partial u_1}\frac{\partial V_1}{\partial u_1} = 0,$$

welche Gleichung nur dann erfüllt ist, wenn gleichzeitig entweder die oberen oder die unteren Zeichen combiniert werden. Dann ist

$$\frac{\partial U_1}{\partial v_1} + i\frac{\partial V_1}{\partial v_1} = \mp \frac{\partial V_1}{\partial u_1} \pm i\frac{\partial U_1}{\partial u_1} = \pm i\left(\frac{\partial U_1}{\partial u_1} + i\frac{\partial V_1}{\partial u_1}\right),$$

oder endlich

$$\frac{\partial (U_1 + i V_1)}{\partial v_1} = \pm i \frac{\partial (U_1 + i V_1)}{\partial u_1}$$

und dieser partiellen Differentialgleichung wird genügt, wenn

$$U_1 + i V_1 = F(u_1 \pm i v_1) \tag{37}$$

gewählt wird, wo F eine ganze willkürliche Funktion ist;[1]) denn es ist

$$\frac{\partial (U_1 + i V_1)}{\partial u_1} = F'(u_1 \pm i v_1); \quad \frac{\partial (U_1 + i V_1)}{\partial v_1} = \pm i F'(u_1 \pm i v_1).$$

Man erhält also andere und zwar *alle* conformen Abbildungen, wenn man *irgend eine beliebige Funktion* $F(u_1 \pm i v_1)$ der u_1 und v_1 der einen Fläche wählt, dieselben in ihre reellen und imaginären Bestandtheile zerlegt, und den reellen Bestandtheil als U, den imaginären als iV der anderen Fläche betrachtet. Bildet man dann

$$W^2 = \left(\frac{\partial U_1}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_1}{\partial u_1}\right)^2 = \left(\frac{\partial U_1}{\partial v_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_1}{\partial v_1}\right)^2,$$

1) Das Charakteristische dieser Funktion ist, dass sie nur die Combination $u_1 \pm i v_1$, nicht aber die Argumente u_1 und v_1 getrennt enthält; es ist also nach *Cauchy* eine *monogene Funktion*, oder eine Funktion im *Riemann*'schen Sinne.

so wird das Vergrösserungsverhältnis

$$k = \sqrt{\frac{Me}{Em}} \cdot W.$$

Anmerkung: Bezeichnet man $U_1 + i V_1$ mit Z, $u_1 + i v_1$ mit z, so wird

$$Z = F(z)$$

und aus der Gleichung

$$\frac{\partial Z}{\partial v_1} = i \frac{\partial Z}{\partial u_1}$$

folgt, dass $\frac{dZ}{dz}$ von der Richtung von dz unabhängig ist, und daraus wieder, so lange $\frac{dZ}{dz}$ weder Null noch unendlich wird, die Ähnlichkeit in den kleinsten Theilen. Welche Beziehung an die Stelle derselben (der Ähnlichkeit in den kleinsten Theilen) zu treten hat, wenn $\frac{dZ}{dz}$ verschwindet oder unendlich wird, gehört nicht hierher, und kann in den Lehrbüchern über Funktionentheorie, z. B. *Königsberger*, „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Funktionen" I. Bd. pag. 19 und 144 nachgesehen werden. Beispielsweise wird bei der conformen Kegelprojektion von *Lambert* die Winkelgleichheit (Ähnlichkeit in den kleinsten Theilen) im Pole nicht stattfinden.

49. Einige Beispiele werden diese Entwickelungen näher erläutern. Für die Ebene kann man setzen:

$$\begin{array}{llll} x = u_1 & a = 1 & a' = 0 & e_1 = 1 \\ y = v_1 & b = 0 & b' = 1 & f_1 = 0 \\ z = 0 & c = 0 & c' = 0 & g_1 = 1; \quad \sqrt{e_1 g_1 - f_1^2} = 1 \end{array}$$

$$ds_1^2 = dx^2 + dy^2$$

$$m_1 = 1.$$

Für die Kugel ist

$$\begin{array}{llll} x = r\cos u_2 \cos v_2 & a = -r\sin u_2 \cos v_2 & a' = -r\cos u_2 \sin v_2 & e_2 = r^2 \cos v_2^2 \\ y = r\sin u_2 \cos v_2 & b = +r\cos u_2 \cos v_2 & b' = -r\sin u_2 \sin v_2 & f_2 = 0 \\ z = r\sin v_2 & c = 0 & c' = +r\cos v_2 & g_2 = r^2 \end{array}$$

$$\sqrt{e_2 g_2 - f_2^2} = r^2 \cos v_2.$$

Ist die xy-Ebene die Äquatorebene, so ist v_2 die geographische Breite, u_2 die geographische Länge, gezählt vom Meridian der Kartenmitte;

$$ds^2 = r^2 \cos v_2^2 \, du_2^2 + r^2 \, dv_2^2,$$

folglich die Gleichungen (28):

$$r^2 \cos v_2^2 \, du_2 = \sqrt{m_2} \, du''$$

$$r^2 \cos v_2 \, dv_2 = \sqrt{m_2} \, dv'',$$

oder die zu integrierende Differentialgleichung (31):

$$r^2 \cos v_2^2 \, du_2 + i r^2 \cos v_2 \, dv_2 = 0.$$

Hier sieht man sofort, dass ein Multiplikator $\frac{1}{r^2 \cos v_2^2}$ ist, da

$$du_2 + i \frac{dv_2}{\cos v_2} = 0$$

ein vollständiges Differential ist. Da also

$$\mu + \nu i = \frac{1}{r^2 \cos v_2^2},$$

folglich auch[1])

$$\mu - \nu i = \frac{1}{r^2 \cos v_2^2},$$

so wird

$$m_2 = r^4 \cos v_2^4$$

und das Integral der Differentialgleichung

$$u_2 + i \log_n \operatorname{tg}\left(45 + \frac{v_2}{2}\right) = u'' + iv''$$

$$u'' = u_2; \quad v'' = \log_n \operatorname{tg}\left(45 + \frac{v_2}{2}\right).$$

Für das Rotationsellipsoid ist

$$x = \frac{A \cos u_3 \cos v_3}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin v_3^2}} \quad a = -\frac{A \sin u_3 \cos v_3}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin v_3^2}} \quad a' = -\frac{A \cos u_3 \sin v_3 (1 - \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2 \sin v_3^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y = \frac{A \sin u_3 \cos v_3}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin v_3^2}} \quad b = +\frac{A \cos u_3 \cos v_3}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin v_3^2}} \quad b' = -\frac{A \sin u_3 \sin v_3 (1 - \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2 \sin v_3^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$z = \frac{A (1 - \varepsilon^2) \sin v_3}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin v_3^2}} \quad c = 0 \quad c' = +\frac{A (1 - \varepsilon^2) \cos v_3}{(1 - \varepsilon^2 \sin v_3^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$e_3 = \frac{A^2 \cos v_3^2}{1 - \varepsilon^2 \sin v_3^2}$$

$$f_3 = 0$$

$$g_3 = \frac{A^2 (1 - \varepsilon^2)^2}{(1 - \varepsilon^2 \sin v_3^2)^3} \qquad \sqrt{e_3 g_3 - f_3^2} = \frac{A^2 (1 - \varepsilon^2) \cos v_3}{(1 - \varepsilon^2 \sin v_3^2)^2}$$

u_3 ist wieder die geographische Länge und v_3, da die xy-Ebene die Äquatorebene ist, die geographische Breite. Die Differentialgleichung ist

$$\frac{A^2 \cos v_3^2}{1 - \varepsilon^2 \sin v_3^2}\, du_3 + i\, \frac{A^2 (1 - \varepsilon^2) \cos v_3}{(1 - \varepsilon^2 \sin v_3^2)^2}\, dv_3 = 0.$$

deren integrierender Faktor[1])

$$\mu + i\nu = \frac{1 - \varepsilon^2 \sin v_3^2}{A^2 \cos v_3^2},$$

demnach auch

$$\mu - i\nu = \mu + i\nu,$$

und

$$m_3 = \frac{A^4 \cos v_3^4}{(1 - \varepsilon^2 \sin v_3^2)^2}.$$

Endlich ist hier

$$du_3 = du'''$$

$$\frac{(1 - \varepsilon^2)\, dv_3}{(1 - \varepsilon^2 \sin v_3^2) \cos v_3} = dv''',$$

also

$$u''' = u_3$$

$$v''' = \log_n \left[\operatorname{tg}\left(45 + \tfrac{1}{2} v_3\right) \left(\frac{1 - \varepsilon \sin v_3}{1 + \varepsilon \sin v_3}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\right]$$

1) Indem nur $-i$ statt $+i$ zu setzen ist, der imaginäre Theil hier aber Null ist.

1. **Abbildung der Kugel auf die Ebene.** Man hat die U, V, E, F, G, M der allgemeinen Gleichungen zu ersetzen durch u_1, v_1, e_1, f_1, g_1, m_1 und die u, v, e, f, g, m durch u_2, v_2, e_2, f_2, g_2, m_2. Nachdem die Bedingungen $e = E$, $f = F$, $g = G$ nicht erfüllt sind, so muss man auf ein anderes System der u- und v-Linien übergehen. Für die Ebene wird dies nicht nötig, weil die Gleichung für ds die Form (29) bereits hat. Für die Kugel wird $U_1 V_1$ durch $u''v''$ ersetzt, und *eine* conforme Abbildung würde sich sofort dadurch ergeben, dass man

$$u_1 = u''; \quad v_1 = v''$$

setzt, oder wenn man wieder die alten u- und v-Linien der Darstellung zu Grunde legen wollte:

$$x = u_2$$
$$y = \log_n \operatorname{tg}\left(45 + \frac{v_2}{2}\right).$$

Dieses ist aber nicht die einzige conforme Abbildung. *Alle anderen* folgen aus

$$x + iy = f\left[u_2 \pm i \log_n \operatorname{tg}\left(45 + \frac{v_2}{2}\right)\right]. \tag{38a}$$

Wählt man für f irgend eine beliebige Funktion, zerlegt sie in ihren reellen und imaginären Bestandtheil, setzt x gleich dem reellen Theile, y gleich dem Coefficienten von i, so ergiebt sich stets eine conforme Abbildung.

Da nun

$$M = 1, \quad E = 1; \quad m = r^4 \cos v_2^{\,4}, \quad e = r^2 \cos v_2^{\,2},$$

so ist

$$\left.\begin{aligned} k^2 &= \frac{W^2}{r^2 \cos v_2^{\,2}} \\ W^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_2}\right)^2 \end{aligned}\right\}. \tag{38b}$$

wobei

2. **Abbildung des Ellipsoides auf die Kugel.** Das Linienelement hat weder für die Kugel noch für das Ellipsoid die Form (29); der Übergang auf diese Form wird durch die Linienschaaren der $u''v''$; $u'''v'''$ geleistet, daher ist

$$u'' = u'''$$
$$v'' = v'''$$

eine conforme Abbildung und allgemein eine jede:

$$u'' + iv'' = f(u''' + iv'''),$$

woraus folgt:

$$u_2 + i \log_n \operatorname{tg}\left(45 + \frac{v_2}{2}\right)$$
$$= f\left\{u_3 \pm i \log_n \left[\operatorname{tg}\left(45 + \tfrac{1}{2} v_3\right)\left(\frac{1 - \varepsilon \sin v_3}{1 + \varepsilon \sin v_3}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\right]\right\}. \tag{39a}$$

Hier ist

$$m = \frac{A^4 \cos v_3^4}{(1 - \varepsilon^2 \sin v_3^2)^2}; \quad e = \frac{A^2 \cos v_3^2}{(1 - \varepsilon^2 \sin v_3^2)}$$

$$M = r^4 \cos v_2^4, \qquad E = r^2 \cos v_2^2,$$

demnach das Vergrösserungsverhältnis:

$$\left.\begin{aligned} k^2 &= \frac{r^2 \cos v_2^2}{A^2 \cos v_3^2} (1 - \varepsilon^2 \sin v_3^2) W^2 \\ W^2 &= \left(\frac{\partial u_2}{\partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial \log_n \operatorname{tg}\left(45 + \frac{v_2}{2}\right)}{\partial u_3}\right)^2 \end{aligned}\right\}. \qquad (39\text{b})$$

wobei

3. Abbildung des Ellipsoides auf die Ebene. Allgemein ist wieder

$$u + iv = f(u''' \pm iv'''),$$

oder substituiert:

$$x + iy = f\left\{u_3 \pm i \log_n \left[\operatorname{tg}\left(45 + \frac{v_3}{2}\right)\left(\frac{1 - \varepsilon \sin v_3}{1 + \varepsilon \sin v_3}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\right]\right\} \qquad (40\text{a})$$

und das Vergrösserungsverhältnis

$$\left.\begin{aligned} k^2 &= \frac{1 - \varepsilon^2 \sin v_3^2}{A^2 \cos v_3^2} W^2 \\ W^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_3}\right)^2 \end{aligned}\right\}. \qquad (40\text{b})$$

wobei

Man kann aus der Abbildung des Ellipsoides auf die Ebene leicht diejenige der Kugel auf die Ebene erhalten, indem man $\varepsilon = 0$ setzt. Man kann aber auch umgekehrt aus der Darstellung der Kugel diejenige für das Ellipsoid in einfacher Weise erhalten. Es war für die Kugel

$$x + iy = f\left\{u_2 + i \log_n \operatorname{tg}\left(45 + \frac{v_2}{2}\right)\right\}, \qquad (38\text{a})$$

für das Ellipsoid

$$x + iy = f\left\{u_3 + i \log_n \left[\operatorname{tg}\left(45 + \frac{v_3}{2}\right)\left(\frac{1 - \varepsilon \sin v_3}{1 + \varepsilon \sin v_3}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\right]\right\}. \qquad (40\text{a})$$

Sei nun

$$\operatorname{tg}\left(45 + \frac{v_3}{2}\right)\left(\frac{1 - \varepsilon \sin v_3}{1 + \varepsilon \sin v_3}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} = \operatorname{tg}\left(45 + \tfrac{1}{2} v\right), \qquad (41)$$

so würde (40a) übergehen in

$$x + iy = f\left(u_3 + i \log_n \operatorname{tg}\left(45 + \frac{v}{2}\right)\right),$$

d. h. *man könnte für irgend eine Wahl von f die Construktion des Netzes für die betreffende conforme Abbildung*[1]) *genau so durchführen, wie für die Kugel, wenn man nur an Stelle der geographischen Breite v_3 einen anderen Winkel v benützt, welcher sich aus v_3 durch die Gleichung (41) bestimmt.* Da aber $v - v_3$ nur sehr klein sein wird (von der Ordnung der Excentricität der Meridianellipse der Erde),

1) Dies gilt natürlich *nur* für die conformen Abbildungen.

so wird es am besten direkt diese Differenz als Funktion von v_3 und ε auszudrücken. Es ist

$$45 + \tfrac{1}{2} v = \operatorname{arc\,tg}\left[\operatorname{tg}\left(45 + \frac{v_3}{2}\right)\left(\frac{1-\varepsilon\sin v_3}{1+\varepsilon\sin v_3}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\right] = f(v_3, \varepsilon). \quad \text{(p)}$$

Um nun nach Potenzen von ε zu entwickeln, hat man

$$f(v_3, \varepsilon) = f(v_3, \varepsilon)_{\varepsilon=0} + \varepsilon\left(\frac{\partial f(v_3, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f(v_3, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2}\right)_{\varepsilon=0} + \cdots$$

Nun ist

$$\frac{\partial f(v_3, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\left(45+\frac{v_3}{2}\right)\left[\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1-\varepsilon\sin v_3}{1+\varepsilon\sin v_3}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}-1}\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{1-\varepsilon\sin v_3}{1+\varepsilon\sin v_3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1-\varepsilon\sin v_3}{1+\varepsilon\sin v_3}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\log_n\frac{1-\varepsilon\sin v_3}{1+\varepsilon\sin v_3}\right]}{1+\operatorname{tg}\left(45+\frac{v_3}{2}\right)^2\left(\frac{1-\varepsilon\sin v_3}{1+\varepsilon\sin v_3}\right)^{\varepsilon}}$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\left(45+\frac{v}{2}\right)\left[\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1+\varepsilon\sin v_3}{1-\varepsilon\sin v_3}\right)\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{1-\varepsilon\sin v_3}{1+\varepsilon\sin v_3}\right)+\frac{1}{2}\log_n\left(\frac{1-\varepsilon\sin v_3}{1+\varepsilon\sin v_3}\right)\right]}{1+\operatorname{tg}\left(45+\frac{v}{2}\right)^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\cos v\left[\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1+\varepsilon\sin v_3}{1-\varepsilon\sin v_3}\right)\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{1-\varepsilon\sin v_3}{1+\varepsilon\sin v_3}\right) + \tfrac{1}{2}\log_n\left(\frac{1-\varepsilon\sin v_3}{1+\varepsilon\sin v_3}\right)\right]$$

und da

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{1-\varepsilon\sin v_3}{1+\varepsilon\sin v_3}\right) = -\frac{2\sin v_3}{(1+\varepsilon\sin v_3)^2}.$$

ist, so wird

$$\frac{\partial f(v_3, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \tfrac{1}{2}\cos v\left[-\frac{\varepsilon\sin v_3}{1-\varepsilon^2\sin v_3^2} + \tfrac{1}{2}\log_n\frac{1-\varepsilon\sin v_3}{1+\varepsilon\sin v_3}\right].$$

Aus (p) folgt, dass

$$v = 2f(v_3, \varepsilon) - 90^0,$$

demnach

$$\frac{\partial v}{\partial \varepsilon} = 2\frac{\partial f(v_3, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}$$

also

$$\frac{\partial^2 f(v_3, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} = -\sin v\frac{\partial f(v_3, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\left[-\frac{\varepsilon\sin v_3}{1-\varepsilon^2\sin v_3^2} + \tfrac{1}{2}\log_n\frac{1-\varepsilon\sin v_3}{1+\varepsilon\sin v_3}\right]$$
$$+ \tfrac{1}{2}\cos v\left[-\frac{1+\varepsilon^2\sin v_3^2}{(1-\varepsilon^2\sin v_3^2)^2}\sin v_3 - \frac{\sin v_3}{1-\varepsilon^2\sin v_3^2}\right]$$
$$= -2\operatorname{tg} v\left(\frac{\partial f(v_3, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)^2 - \cos v\frac{\sin v_3}{(1-\varepsilon^2\sin v_3^2)^2}.$$

Differenziert man nochmals, so erhält man

$$\frac{\partial^3 f(v_3, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^3} = -\frac{4}{\cos v^2}\left(\frac{\partial f(v_3, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)^3 - 4\operatorname{tg} v\left(\frac{\partial f(v_3, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)\frac{\partial^2 f(v_3, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2}$$
$$+ \frac{2\sin v_3\sin v}{(1-\varepsilon^2\sin v_3^2)^2}\frac{\partial f(v_3, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} - \frac{4\sin v_3\cos v\cdot\varepsilon\sin v_3^2}{(1-\varepsilon^2\sin v_3^2)^3}$$

$$= -\frac{4}{\cos v^2}\left(\frac{\partial f(v_3, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)^3 + 4\operatorname{tg} v\frac{\partial f(v_3, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\left[2\operatorname{tg} v\left(\frac{\partial f(v_3, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)^2 + \frac{\sin v_3\cos v}{(1-\varepsilon^2\sin v_3^2)^2}\right]$$
$$+ \frac{2\sin v_3\sin v}{(1-\varepsilon^2\sin v_3^2)^2}\frac{\partial f(v_3, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} - \frac{4\varepsilon\sin v_3^3\cos v}{(1-\varepsilon^2\sin v_3^2)^3}$$

$$= -\frac{4}{\cos v^2}\left(\frac{\partial f(v_3, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)^3(1-2\sin v^2) + 6\frac{\sin v_3\sin v}{(1-\varepsilon^2\sin v_3^2)^2}\frac{\partial f(v_3, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} - 4\varepsilon\frac{\sin v_3^3\cos v}{(1-\varepsilon^2\sin v_3^2)^3}$$

Es wird daher

$$f(v_3, \varepsilon)_0 = 45 + \frac{v_3}{2}; \quad \left(\frac{\partial f(v_3, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_0 = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 f(v_3, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_0 = -\sin v_3 \cos v_3;$$

$$\left(\frac{\partial^3 f(v_3, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_0 = 0.$$

Differenziert man nochmals, und setzt $\varepsilon = 0$, so wird der aus dem ersten Gliede entstehende Ausdruck $\frac{\partial v}{\partial \varepsilon}$ als Faktor enthalten, welcher für $\varepsilon = 0$ selbst Null wird, der zweite Theil liefert an nicht verschwindenden Ausdrücken

$$\left(\frac{6 \sin v_3 \sin v}{(1 - \varepsilon^2 \sin v_3^2)^2} \frac{\partial^2 f(v_3, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2}\right)_0 = -6 \sin v_3^3 \cos v_3;$$

der dritte Theil liefert den nicht verschwindenden Ausdruck

$$-\left(\frac{4 \sin v_3^3 \cos v}{(1 - \varepsilon^2 \sin v_3^2)^3}\right)_0 = -4 \sin v_3^3 \cos v_3,$$

also ist

$$\left(\frac{\partial^4 f(v_3, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^4}\right)_0 = -10 \sin v_3^3 \cos v_3.$$

Man hat folglich

$$45 + \tfrac{1}{2} v = 45 + \tfrac{1}{2} v_3 - \frac{\varepsilon^2}{2} \sin v_3 \cos v_3 - \frac{\varepsilon^4}{24} \cdot 10 \sin v_3^3 \cos v_3,$$

oder

$$v = v_3 - \frac{\varepsilon^2}{2} \sin 2v_3 - \tfrac{5}{48} \varepsilon^4 (2 \sin 2v_3 - \sin 4v_3).$$

Setzt man daher

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \sin 2v_3 + \tfrac{5}{48} \varepsilon^4 (2 \sin 2v_3 - \sin 4v_3) = x, \tag{42}$$

so wird

$$v = v_3 - x \tag{42a}$$

wobei x der Tafel 18 zu entnehmen ist, welche mit dem Argumente v_3 den Wert von x giebt.

Diese Lösung kömmt eigentlich darauf hinaus, das Ellipsoid auf eine Kugel abzubilden, und diese dann auf die Ebene zu übertragen. Denn für die Abbildung des Ellipsoides auf die Kugel hat man

$$u_2 + i \log_n \operatorname{tg}\left(45 + \frac{v_2}{2}\right)$$

$$= f\left\{u_3 \pm i \log_n \left[\operatorname{tg}(45 + \tfrac{1}{2} v_3) \left(\frac{1 - \varepsilon \sin v_3}{1 + \varepsilon \sin v_3}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\right]\right\}$$

also mit Beibehaltung des oberen Zeichens

$$u_2 + i \log_n \operatorname{tg}\left(45 + \frac{v_2}{2}\right) = f(u_3 + i \log_n \operatorname{tg}(45 + \tfrac{1}{2} v)),$$

daher für den einfachsten Fall der Abbildung, für welchen $f(z) = z$ ist,

$$v = v_2.$$

Der geographischen Breite v_3 auf dem Ellipsoide entspricht daher die geographische Breite v der Kugel, welche man daher die *co-*

ordinierte Breite nennen kann.[1]) Das *so veränderte Bild* des Ellipsoides (äquidistante Parallelkreise der Kugel entsprechen *nicht* Parallelkreisen des Ellipsoides gleicher Breitendifferenz) wird dann conform auf die Ebene abgebildet. Anders ausgesprochen: Um das Ellipsoid nach irgend einem Gesetze $f(z)$ conform auf die Ebene zu übertragen, kann man so verfahren, als ob eine Kugel abzubilden wäre, nur hat man statt der geographischen Breite v_3 die coordinierte Breite v zu verwenden.

Wir hatten für die Abbildung der Kugel und des Ellipsoides gefunden

$$x + iy = f_1(u + iv),$$

wo für die Kugel uv durch $u''v''$ für das Ellipsoid durch $u'''v'''$ zu ersetzen ist. Es wird daher, wenn auch die Coëfficienten als complex angesehen werden, daher durch Einführung von $-i$ an Stelle von $+i$ die Funktion f_1 sich in eine andere f_2 verwandeln,

$$x - iy = f_2(u - iv)$$

folglich:

$$x = \tfrac{1}{2}[f_1(u + iv) + f_2(u - iv)]$$

$$y = -\frac{i}{2}[f_1(u + iv) - f_2(u - iv)],$$

oder, wenn Kürze halber

$$f_1(u + iv) = f_1; \quad f_2(u - iv) = f_2$$

gesetzt wird:

$$x = \tfrac{1}{2}(f_1 + f_2); \quad iy = \tfrac{1}{2}(f_1 - f_2).$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \tfrac{1}{2}(f_1' + f_2') \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{i}{2}(f_1' - f_2')$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{i}{2}(f_1' - f_2') \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \tfrac{1}{2}(f_1' + f_2')$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}; \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u},$$

welches die Gleichungen (36) sind. Hieraus folgt noch:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = -\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = -\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = -\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}. \tag{36a}$$

Nun ist

$$W^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$$

$$= \tfrac{1}{4}[(f_1' + f_2')^2 - (f_1' - f_2')^2] = f_1' f_2',$$

also

$$W = \sqrt{f_1'(u + iv) \cdot f_2'(u - iv)}.$$

Sind die Coordinaten x, y einer ebenen Curve durch eine unabhängig veränderliche t in der Form $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ausgedrückt,

---

1) Nach *Gretschel* corrigierte Breite; da aber dieser Name bereits anderweitig verwendet wird, so soll die obige Benennung hier beibehalten werden, obgleich corrigierte und coordinierte Breite sich erst in den von der 4. Potenz der Excentricität abhängigen Gliedern unterscheiden.

so ist bekanntlich der Ausdruck für den Halbmesser des Krümmungskreises R

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Da in den obigen Ausdrücken von x und y, u eine blosse Funktion der geographischen Länge eines Ortes (u ist gleich der Länge), v eine blosse Funktion der geographischen Breite ist (s. die Ausdrücke von v'' und v'''), so ist u für den Meridian, v für den Parallel constant, oder für den Meridian v, für den Parallel u die hier eingeführte Variable t; ist demnach R_m der Krümmungshalbmesser eines Punktes des Meridians der Karte, R_p der Krümmungshalbmesser eines Paralleles derselben, so ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{R_m} &= \pm \frac{\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}}{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{1}{R_p} &= \pm \frac{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}}{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}\right\}, \tag{43}$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichungen (36a)

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_m} &= \pm \frac{1}{W^3}\left\{\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}\right\} = \pm \frac{1}{W^2}\frac{\partial W}{\partial u} \\ \frac{1}{R_p} &= \pm \frac{1}{W^3}\left\{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}\right\} = \pm \frac{1}{W^2}\frac{\partial W}{\partial v} \end{aligned}$$

oder endlich, abgesehen vom Zeichen[1])

wobei
$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{R_m} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{W}\right); \quad \frac{1}{R_p} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{W}\right) \\ W = \sqrt{f_1'(u+iv) \cdot f_2'(u-iv)} \end{aligned}\right\}. \tag{43a}$$

50. *a*) Sei $f(z) = cz$, dann wird[2])

$$x + iy = cu \pm ic \log_n \left\{ \operatorname{tg}\left(45 + \frac{v}{2}\right)\left(\frac{1 - \varepsilon \sin v}{1 + \varepsilon \sin v}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \right\}.$$

---

1) S. *Lagrange*: „Sur la construction des cartes géographiques" in den „Nouveaux mémoires de l'Academie royale de Berlin" 1779 pag. 173.

2) Statt v_1 wird jetzt Kürze halber v gesetzt. Da für diesen Fall $f'(z) = c$, also in der ganzen Ebene weder Null, noch unendlich, so findet in der ganzen unendlichen Ebene Ähnlichkeit in den kleinsten Theilen statt.

Durch Trennung des Reellen vom Imaginären folgt:

$$x = cu$$
$$y = \pm c \log_n \left\{ \operatorname{tg}\left(45 + \frac{v}{2}\right) \left(\frac{1 - \varepsilon \sin v}{1 + \varepsilon \sin v}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \right\}. \tag{44}$$

Das Doppelzeichen erledigt sich hier sehr einfach, indem das untere Zeichen in das obere übergeht, wenn man die positive Y-axe mit der negativen vertauscht. Da

$$\frac{\partial x}{\partial u} = c; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 0,$$

so wird das Vergrösserungsverhältnis

$$k^2 = \frac{1 - \varepsilon^2 \sin v^2}{A^2 \cos v^2} c^2$$
$$k = \frac{c}{A} \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin v^2}}{\cos v}.$$

Da die Wahl der grossen Halbaxe des abzubildenden entsprechend verkleinerten Erdsphäroides beliebig ist, so kann man $A = c$ wählen, dann würde

$$k = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin v^2}}{\cos v};$$

c ist also nichts anderes als das Verkleinerungsverhältnis der dargestellten Erdoberfläche gegenüber der natürlichen.

Für $u =$ const. wird $x =$ const., d. h. die Meridiane werden durch gerade Linien parallel zur Y-axe dargestellt; der Nullmeridian ist die Y-axe selbst. Für $v =$ const. wird $y =$ const., d. h. die Parallelkreise werden durch gerade Linien parallel zur X-axe dargestellt, deren Abstand durch die Grösse y bestimmt wird; die X-axe ist der Äquator. Für $\varepsilon = 0$ erhält man

$$x = cu$$
$$y = c \log_n \operatorname{tg}\left(45 + \frac{v}{2}\right), \tag{44a}$$

welches die Gleichungen der *Mercator*'schen Projektion sind. Die beiden Gleichungen (44) sind daher die Gleichungen der *Mercator*'schen Projektion für die Abbildung des Ellipsoides auf die Ebene. Man kann hiefür nach dem vorhin gesagten auch die Gleichungen (44a) gelten lassen, wenn man an Stelle der geographischen die coordinierte Breite verwendet. Einfacher wird es jedoch direkt die von ε abhängigen Glieder in y, nach Potenzen von ε geordnet, zu entwickeln. Es ist

$$\log_n \left(\frac{1 - \varepsilon \sin v}{1 + \varepsilon \sin v}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} = -\varepsilon \left[\varepsilon \sin v + \tfrac{1}{3} \varepsilon^3 \sin v^3\right]$$
$$= -\varepsilon^2 \sin v - \tfrac{1}{3} \varepsilon^4 \sin v^3$$

folglich

$$x = c u$$

$$y = c\left[\log_n \operatorname{tg}(45 + \tfrac{1}{2} v) - \varepsilon^2 \sin v - \frac{\varepsilon^4}{8} \sin v^3\right].$$

Tafel 11 enthält die wegen Abplattung von y zu subtrahierende Correktion

$$\xi = \varepsilon^2 \sin v + \frac{\varepsilon^4}{3} \sin v^3.$$

b) Sei

$$f(z) = i C e^{-imz};$$

also [1])

$$x + iy = f(u \pm iv''') = i C e^{\pm m v'''} (\cos m u - i \sin m u)$$
$$= C e^{\pm m v'''} (\sin m u + i \cos m u),$$

wobei

$$v''' = \log_n \left\{ \operatorname{tg}\left(45 + \frac{v}{2}\right) \left(\frac{1 - \varepsilon \sin v}{1 + \varepsilon \sin v}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \right\},$$

daher

$$e^{\pm m v'''} = \operatorname{tg}\left(45 + \frac{v}{2}\right)^{\pm m} \left(\frac{1 - \varepsilon \sin v}{1 + \varepsilon \sin v}\right)^{\pm m \frac{\varepsilon}{2}}.$$

Es ist demnach

$$x = C e^{\pm m v'''} \sin m u$$
$$y = C e^{\pm m v'''} \cos m u.$$

Behält man hier das untere Zeichen [2]) bei, und beachtet, dass

$$\operatorname{tg}\left(45 + \frac{v}{2}\right)^{-m} = \operatorname{tg}\left(45 - \frac{v}{2}\right)^{m},$$

so wird

$$\left.\begin{aligned} x &= C \operatorname{tg}\left(45 - \frac{v}{2}\right)^{m} \left(\frac{1 + \varepsilon \sin v}{1 - \varepsilon \sin v}\right)^{m \frac{\varepsilon}{2}} \sin m u \\ y &= C \operatorname{tg}\left(45 - \frac{v}{2}\right)^{m} \left(\frac{1 + \varepsilon \sin v}{1 - \varepsilon \sin v}\right)^{m \frac{\varepsilon}{2}} \cos m u \end{aligned}\right\}. \tag{45}$$

---

1) Da

$$f'(z) = m C e^{-imz} = m C e^{\pm m v'''} (\cos m u - i \sin m u)$$
$$= m C \, tg\left(45 - \frac{v}{2}\right)^{\mp m} \left(\frac{1 + \varepsilon \sin v}{1 - \varepsilon \sin v}\right)^{\mp m \frac{\varepsilon}{2}} (\cos m u - i \sin m u)$$

welcher Wert für jedes v und u, mit Ausnahme von $v = \pm 90^0$, d. h. für alle Punkte der Kugel mit Ausnahme der Pole endlich bleibt und nicht verschwindet, so wird in allen Punkten mit Ausnahme der Bilder der Pole Ähnlichkeit in den kleinsten Theilen stattfinden.

2) Weil für das obere Zeichen der Radius des Parallelkreises von der Breite $v = 90^0$

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} = C e^{+m v'''} = C \operatorname{tg}\left(45 + \frac{v}{2}\right)^{m} \left(\frac{1 - \varepsilon \sin v}{1 + \varepsilon \sin v}\right)^{m \frac{\varepsilon}{2}} = \infty$$

würde.

Durch Elimination von v erhält man

$$\frac{x}{y} = \operatorname{tg} mu$$

oder

$$x = y \operatorname{tg} mu \tag{45a}$$

als Gleichung des Meridians der Länge u; dieser ist daher eine durch den Ursprung gehende Gerade, welche mit der Y-axe (dem Nullmeridian) den Winkel mu einschliesst.

Durch Elimination von u ergiebt sich

$$x^2 + y^2 = \left[C \operatorname{tg}\left(45 - \frac{v}{2}\right)^m \left(\frac{1 + \varepsilon \sin v}{1 - \varepsilon \sin v}\right)^{m\frac{\varepsilon}{2}}\right]^2 \tag{45b}$$

als Gleichung des Parallelkreises der Karte von der Breite v. Die Parallelen sind daher Kreise, deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt im Ursprung ist, und deren Halbmesser

$$\varrho = C \operatorname{tg}\left(45 - \frac{v}{2}\right)^m \left(\frac{1 + \varepsilon \sin v}{1 - \varepsilon \sin v}\right)^{m\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Für $\varepsilon = 0$ gehen diese Gleichungen über in

$$x = y \operatorname{tg} mu$$

$$x^2 + y^2 = C \operatorname{tg}\left(45 - \frac{v}{2}\right)^m,$$

welches die Gleichungen der bereits früher behandelten Kegelprojektion von *Lambert* sind.

Da

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \quad mC \operatorname{tg}\left(45 - \frac{v}{2}\right)^m \left(\frac{1 + \varepsilon \sin v}{1 - \varepsilon \sin v}\right)^{m\frac{\varepsilon}{2}} \cos mu$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -mC \operatorname{tg}\left(45 - \frac{v}{2}\right)^m \left(\frac{1 + \varepsilon \sin v}{1 - \varepsilon \sin v}\right)^{m\frac{\varepsilon}{2}} \sin mu$$

ist, so wird

$$W = m\varrho$$

und das Vergrösserungsverhältnis

$$k = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin v^2}}{A \cos v} \cdot m\varrho.$$

Für den Halbmesser ϱ kann man wieder den einfacheren, für die Kugel geltenden Ausdruck

$$\varrho' = C \operatorname{tg}\left(45 - \frac{v}{2}\right)^m$$

verwenden, wenn man für v die coordinierte Breite setzt; entwickelt man aber den Ausdruck für ϱ direkt nach Potenzen von ε, so wird:

$$(1 + \varepsilon \sin v)^{m\frac{\varepsilon}{2}} = 1 + m\frac{\varepsilon^2}{2} \sin v + \frac{m\varepsilon}{2}\left(\frac{m\varepsilon}{2} - 1\right)\frac{\varepsilon^2 \sin v^2}{2}$$
$$+ \frac{m\varepsilon}{2}\left(\frac{m\varepsilon}{2} - 1\right)\left(\frac{m\varepsilon}{2} - 2\right)\frac{\varepsilon^3 \sin v^3}{6}$$

oder bis inclusive Gliedern 4. Ordnung der Excentricität:

$$(1+\varepsilon\sin v)^{m\frac{\varepsilon}{2}} = 1 + m\frac{\varepsilon^2}{2}\sin v - \frac{m\varepsilon^3}{4}\sin v^2 + \frac{m^2\varepsilon^4}{8}\sin v^2 + \frac{m\varepsilon^4}{6}\sin v^3$$

$$(1-\varepsilon\sin v)^{-\frac{m\varepsilon}{2}} = 1 + m\frac{\varepsilon^2}{2}\sin v + \frac{m\varepsilon^3}{4}\sin v^2 + \frac{m^2\varepsilon^4}{8}\sin v^2 + \frac{m\varepsilon^4}{6}\sin v^3$$

daher

$$\left(\frac{1+\varepsilon\sin v}{1-\varepsilon\sin v}\right)^{\frac{m\varepsilon}{2}} = 1 + m\varepsilon^2\sin v + \frac{m^2\varepsilon^4}{2}\sin v^2 + \frac{m\varepsilon^4}{3}\sin v^3$$

$$\varrho = C\operatorname{tg}\left(45-\frac{v}{2}\right)\left[1 + m\varepsilon^2\sin v + \frac{m^2\varepsilon^4}{2}\sin v^2 + \frac{m\varepsilon^4}{3}\sin v^3\right].$$

Setzt man daher

$$x = \operatorname{tg}\left(45-\frac{v}{2}\right)^m\left[m\varepsilon^2\sin v + \frac{m^2\varepsilon^4}{2}\sin v^2 + m\frac{\varepsilon^4}{3}\sin v^3\right],$$

so ist

$$\varrho = C\left[\operatorname{tg}\left(45-\frac{v}{2}\right)^m + x\right].$$

C bestimmt wieder den Massstab der Karte.

Wie schon erwähnt, ist diese Projektion identisch mit der § 27 behandelten *Lambert*'schen Kegelprojektion, für welche die Werte von $\operatorname{tg}\left(45-\frac{v}{2}\right)^m$ in Tafel 10 enthalten sind.

Das Vergrösserungsverhältnis ist

$$k = \frac{m\,C\operatorname{tg}\left(45-\frac{v}{2}\right)^m}{A\cos v}\left(\frac{1+\varepsilon\sin v}{1-\varepsilon\sin v}\right)^{\frac{m\varepsilon}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin v^2} = \frac{m\varrho}{r_1},$$

wo man auch $C = A$ setzen kann.

Für $m = 1$ wird es, wie schon pag. 110 erwähnt ist, die stereographische Projektion; für das Ellipsoid[1]) wird hiefür[2]), wenn man die Poldistanz $p = 90 - v$ einführt:

$$\varrho' = C\left(\frac{1+\varepsilon\cos p}{1-\varepsilon\cos p}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\operatorname{tg}\frac{p}{2}$$

$$k' = C\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos p^2}}{2A\cos\frac{p^2}{2}}\left(\frac{1+\varepsilon\cos p}{1-\varepsilon\cos p}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Diese Werte von ϱ' und k', so wie der Wert von $K' = k'^2$ ist für $C = A = 1$ aus Tafel 3 zu entnehmen, wobei das Argument der Tafel die Poldistanz (mit v bezeichnet) ist.

Der Wert von k ist selbstverständlich von v abhängig; differenziert man den allgemeinen Ausdruck, so wird

$$\frac{dk}{k} = \frac{d\varrho}{\varrho} - \frac{dr_1}{r_1},$$

1) Eigentlich nicht mehr perspektivische Projektion.

2) Weil

$$\cos v = 2\sin\left(45-\frac{v}{2}\right)\cos\left(45-\frac{v}{2}\right).$$

und da

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = - m \frac{dv}{\cos v} + m\varepsilon^2 \frac{\cos v\, dv}{1 - \varepsilon^2 \sin v^2}$$

$$\frac{dr_1}{r_1} = - \operatorname{tg} v\, dv + \varepsilon^2 \frac{\sin v \cos v\, dv}{1 - \varepsilon^2 \sin v^2},$$

also

$$\frac{dk}{dv} = - \frac{k}{\cos v} (m - \sin v)\left(1 - \frac{\varepsilon^2 r_1^2}{A^2}\right),$$

ist, so folgt

$$\frac{dk}{dv} = - \frac{m \cdot (1 - \varepsilon^2)\, \varrho}{r_1 \cos v\, (1 - \varepsilon^2 \sin v^2)} (m - \sin v)$$

und da der erste Faktor stets positiv ist, so wird das Vergrösserungsverhältnis von $v = 0$ bis zu dem Werte von v, für welchen $\sin v_0 = m$ ist, abnehmen, für welchen Wert man das Minimum von k

$$k = \frac{mC}{A\sqrt{1 - m^2}} \left(\frac{1 - m}{1 + m}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{1 + \varepsilon m}{1 - \varepsilon m}\right)^{\frac{m\varepsilon}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 m^2}$$

erhält, von wo aus der Wert wieder zunimmt, vorausgesetzt, dass m ein echter Bruch ist.

Die Constante m bestimmt *Lambert*[1]) so, dass für zwei bestimmte Parallelen von den Breiten v_1 und v_2 die Längengrade auf der Karte und auf dem Ellipsoide im gleichen Verhältnis zu den Breitengraden stehen; dann müssen es auch die Halbmesser der sie darstellenden Kreise sein, und da diese auf der Karte

$$\varrho_1 = C \operatorname{tg}\left(45 - \frac{v'}{2}\right)^m; \quad \varrho_2 = C \operatorname{tg}\left(45 - \frac{v''}{2}\right)^m$$

sind, wenn v', v'' die coordinierten Breiten sind, und auf dem Ellipsoide

$$r_1 = \frac{A \cos v_1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin v_1^2}}, \quad r_2 = \frac{A \cos v_2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin v_2^2}},$$

so muss

$$\left(\frac{\operatorname{tg}\left(45 - \frac{v'}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45 - \frac{v''}{2}\right)}\right)^m = \frac{\cos v_1}{\cos v_2} \sqrt{\frac{1 - \varepsilon^2 \sin v_2^2}{1 - \varepsilon^2 \sin v_1^2}},$$

daher

$$m = \frac{\log_n \cos v_1 - \log_n \cos v_2 - \frac{1}{2}\log_n (1 - \varepsilon^2 \sin v_1^2) + \frac{1}{2}\log_n (1 - \varepsilon^2 \sin v_2^2)}{\log_n \operatorname{tg}\left(45 - \frac{v'}{2}\right) - \log_n \operatorname{tg}\left(45 - \frac{v''}{2}\right)}, \quad (46)$$

wo man auch

$$\log_n (1 - \varepsilon^2 \sin v_1^2) = - \varepsilon^2 \sin v_1^2$$

$$\log_n (1 - \varepsilon^2 \sin v_2^2) = - \varepsilon^2 \sin v_2^2$$

setzen kann. Für $v_1 = 30^0$, $v_2 = 70^0$ wird $m = 0{\cdot}78327$, das Minimum von k fällt auf die Breite $51^0 34'$.

Fällt das Centrum der Parallelkreise aus der Karte heraus, so wird man sich zunächst auf dem ersten Meridian die einzelnen Grade und Untertheile auftragen, und durch diese die Parallelkreise durch ihre Coordinaten construieren. Dieselben sind

---

1) Für die Kugel; hiefür wurde die Lösung bereits früher (pag. 112) gegeben.

$$x = \varrho \cos m\lambda$$
$$y = \varrho \sin m\lambda,$$

wo x auf dem ersten Meridian vom Pole aus gerechnet ist, oder

$$x = \varrho \cos m\lambda - x_0$$
$$y = \varrho \sin m\lambda,$$

wenn der Anfangspunkt um x_0 vom Pole absteht, welch letztere Formeln man immer verwenden wird. Wählt man hierbei für λ die Längen der zu zeichnenden Meridiane, so hat man gleichzeitig einzelne Punkte für diese erhalten, und kann sie demnach sehr einfach zeichnen.

Diese Projektion wurde, wie schon mehrfach erwähnt, zuerst von *Lambert*, in seinen „Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik" angegeben. *Gauss* macht auf dieselbe in seiner Abhandlung „Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Theile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird", aufmerksam, bemerkt aber (Ges. Werke Bd. V, pag. 204), dass diese Projektion nicht mehr neu ist, sondern unter anderen schon von *Harding* für die Blätter 19 bis 26 seiner Sternkarten (1808—1822) angewandt wurde. Doch hat die geographische Gesellschaft in Petersburg diese Darstellung zur grossen Karte von Russland (12 Blätter 1 : 168000) unter dem Namen *Gauss*'sche Projektion verwendet. Die Karte erstreckt sich zwischen 36 und 68°, m ist so bestimmt, dass $v_1 = 46^0$, $v_2 = 58^0$ ist. Die Änderung des Vergrösserungsverhältnisses ist sehr unbedeutend; für den Parallel von 52° Breite beträgt die Verkürzung 0·994, und für die äussersten Parallelen tritt eine Vergrösserung auf 1·031 und 1·040 auf (siehe pag. 113).

c) Ist $f(z) = c(e^z - e^{-z})$, so ist

$$\begin{aligned} x + iy &= c\,(e^{u_3 \pm iv'''} - e^{-u_3 \mp iv'''}) \\ &= c\,[e^{u_3}(\cos v''' \pm i \sin v''') - e^{-u_3}(\cos v''' \mp i \sin v''')] \\ &= c\,(e^{u_3} - e^{-u_3}) \cos v''' \pm ic\,(e^{u_3} + e^{-u_3}) \sin v''' \end{aligned}$$

folglich

$$x = c\,(e^{u_3} - e^{-u_3}) \cos v'''$$
$$y = \pm c\,(e^{u_3} + e^{-u_3}) \sin v'''$$

wobei

$$v''' = \log_n \left\{ \operatorname{tg}\left(45 + \frac{v}{2}\right) \left(\frac{1 - \varepsilon \sin v}{1 + \varepsilon \sin v}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \right\}$$

und stets das positive Zeichen genommen werden kann, da das negative nur eine Vertauschung der positiven mit der negativen Halbaxe der y bedeutet. Man findet

$$\frac{\partial x}{\partial u_3} = c\,(e^{u_3} + e^{-u_3}) \cos v'''$$
$$\frac{\partial y}{\partial u_3} = c\,(e^{u_3} - e^{-u_3}) \sin v'''$$

folglich das Vergrösserungsverhältnis

$$k^2 = c^2 \left[e^{2u_1} + e^{-2u_1} + 2 \cos 2v'''\right] \frac{1 - \varepsilon^2 \sin v^2}{A^2 \cos v^2}.$$

Als Gleichung der Meridiane findet man durch Elimination von v'''

$$\frac{x^2}{c^2 (e^{u_1} - e^{-u_1})^2} + \frac{y^2}{c^2 (e^{u_1} + e^{-u_1})^2} = 1.$$

Die Meridiane sind demnach Ellipsen. Um die Gleichung der Parallelkreise zu erhalten, folgt zunächst

$$e^{u_1} - e^{-u_1} = \frac{x}{c \cos v'''}$$

$$e^{u_1} + e^{-u_1} = \frac{y}{c \sin v'''},$$

hieraus

$$2e^{u_1} = \frac{x}{c \cos v'''} + \frac{y}{c \sin v'''}$$

$$-2e^{-u_1} = \frac{x}{c \cos v'''} - \frac{y}{c \sin v'''}$$

und durch Multiplication der beiden letzten Gleichungen

$$\frac{y^2}{4c^2 \sin v'''^2} - \frac{x^2}{4c^2 \cos v'''^2} = 1.$$

Die Parallelkreise sind demnach Hyperbeln. Für die Meridiane ist, wenn man mit a, b die grosse und kleine Halbaxe, und mit E die numerische Excentricität bezeichnet:

$$a^2 = c^2 (e^{u_1} + e^{-u_1})^2$$

$$b^2 = c^2 (e^{u_1} - e^{-u_1})^2 = a^2 (1 - E^2),$$

folglich

$$a = c (e^{u_1} + e^{-u_1}); \quad E = \frac{2}{(e^{u_1} + e^{-u_1})}; \quad aE = 2c$$

und die grosse Halbaxe liegt stets in der Richtung der y.

Für die Parallelkreise ist mit Beibehaltung derselben Bezeichnung

$$a^2 = 4c^2 \sin v'''^2$$

$$b^2 = 4c^2 \cos v'''^2 = a^2 (E^2 - 1),$$

folglich

$$a = 2c \sin v''', \quad E = \operatorname{cosec} v''', \quad aE = 2c$$

und die reelle Halbaxe fällt immer in die Richtung der y. Man ersieht hieraus, dass bei dieser Projektion, welche von *Fiorini* (l. c. pag. 526) angegeben wurde, die Meridiane *confocale* Ellipsen (denn die lineare Excentricität aE ist für *alle* Meridiane dieselbe; die Brennpunkte liegen in der Entfernung $2c$ vom Kartenmittelpunkt) die Parallelkreise *confocale* Hyperbeln sind (für welche die Brennpunkte ebenfalls die Entfernung $2c$ von dem Kartenmittelpunkt haben). Für die Meridiane liegen die grossen Axen, für die Parallelkreise die reellen Axen in der Richtung der Y-Axe; es ist diese Projektion also nicht identisch mit der von *Littrow* angegebenen, bei welcher die Meridiane confocale Hyperbeln und die Parallelkreise die orthogonalen

Trajektorien, also ein System von confocalen Ellipsen darstellen. Da diese Projektionen aber kein praktisches Interesse haben, so gehen wir auf dieselben nicht weiter ein.

51. *d*) Conforme Abbildungen, mit kreisförmigen Meridianen und Parallelen. *Lagrange*'sche Projektion.[1])

Sollen die Bilder sowol der Meridiane als auch der Parallelkreise Kreise sein, so müssen, analytisch gesprochen, die Krümmungsradien der sie darstellenden Curven in allen Punkten derselben constant sein; d. h. es muss

$$\frac{\partial \frac{1}{R_m}}{\partial v} = 0; \qquad \frac{\partial \frac{1}{R_p}}{\partial u} = 0.$$

sein. Beide Gleichungen führen auf dieselbe Bedingung (s. Gleichungen (43 a))

$$\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v}\left(\frac{1}{W}\right) = 0.$$

Hieraus folgt auch, dass die Bedingung, dass eine der beiden Netzlinienschaaren Kreise sein soll, auch schon die Erfüllung derselben Bedingung für die zweite Schaar mit sich bringt.[2]) Setzt man, um die letzte Gleichung leichter behandeln zu können,

$$\frac{1}{\sqrt{f_1'(u+iv)}} = \Theta_1(u+iv)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f_2'(u-iv)}} = \Theta_2(u-iv),$$

so ist

$$\frac{1}{W} = \Theta_1(u+iv)\,\Theta_2(u-iv)$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{W}\right) = \Theta_1(u+iv)\,\Theta_2'(u-iv) + \Theta_1'(u+iv)\,\Theta_2(u-iv)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{1}{W}\right) = -i\Theta_1(u+iv)\,\Theta_2''(u-iv) + i\Theta_1''(u+iv)\,\Theta_2(u-iv) = 0,$$

so dass sich die Bedingung ergiebt:

$$\frac{\Theta_1''(u+iv)}{\Theta_1(u+iv)} = \frac{\Theta_2''(u-iv)}{\Theta_2(u-iv)},$$

welche Gleichung nur erfüllt sein kann, wenn jeder der beiden Quotienten gleich einer Constanten α^2 ist, so dass, wenn man für einen Augenblick $z = u + iv$ und $\Theta(z) = Z$ setzt, die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = \alpha^2 Z$$

folgt, deren Integration

$$Z = A_1 e^{\alpha z} + B_1 e^{-\alpha z},$$

oder

$$\Theta_1(u+iv) = A_1 e^{\alpha(u+iv)} + B_1 e^{-\alpha(u+iv)}$$

1) Wobei die gerade Linie auch als Spezialfall des Kreises aufzufassen ist.

2) Diese Projektion wurde von *Lagrange* in seiner Arbeit „Sur la construction des cartes géographiques" in den „Nouveaux mémoires de l'Academie Royale des sciences et belles-lettres" 1779 pag. 161 ff. gegeben.

liefert. Hiermit wird

$$f_1'(u+iv) = \frac{df_1(z)}{dz} = \frac{1}{(A_1 e^{\alpha z} + B_1 e^{-\alpha z})^2} = \frac{e^{2\alpha z}}{(A_1 e^{2\alpha z} + B_1)^2}$$

oder

$$df_1(z) = \frac{1}{2A_1\alpha} \frac{d(A_1 e^{2\alpha z} + B_1)}{(A_1 e^{2\alpha z} + B_1)^2}$$

und integriert [1])

$$f_1(z) = -\frac{1}{2A_1\alpha} \cdot \frac{1}{(A_1 e^{2\alpha z} + B_1)} + C.$$

Setzt man

$$-2A_1^2\alpha = M, \quad -2A_1 B_1 \alpha = N$$

und restituiert den Wert von Z, so wird

$$f_1(u+iv) = \frac{1}{Me^{2\alpha(u+iv)} + N}. \tag{47}$$

---

1) Hier ist

$$f'(z) = \left(\frac{e^{\alpha z}}{A_1 e^{2\alpha z} + B_1}\right)^2 = \left(\frac{1}{A_1 e^{\alpha z} + B_1 e^{-\alpha z}}\right)^2;$$

dies kann nur Null werden für

$$e^{\alpha z} = 0 \text{ oder } \infty$$

und unendlich für

$$e^{2\alpha z} = -\frac{B_1}{A_1} = -\frac{N}{M} = -\frac{B}{A},$$

oder wenn $\alpha = -ci$ und der später eingeführte Wert

$$\frac{A}{B} = \cot\left(45 + \frac{w_0}{2}\right)^{2c}$$

benützt wird:

$$e^{-ciz} = 0 \text{ oder } \infty; \quad e^{-2ciz} = -\operatorname{tg}\left(45 + \frac{w_0}{2}\right)^{2c}$$

und es ist

$$e^{-ciz} = e^{-ci(u+v'''i)} = e^{cv'''-ciu}$$

$$e^{-2ciz} = e^{2cv'''-2ciu}.$$

Setzt man hier auch wieder

$$v''' = \log_n \operatorname{tg}\left(45 + \frac{w}{2}\right),$$

also

$$e^{cv'''} = \operatorname{tg}\left(45 + \frac{w}{2}\right)^c,$$

wo w die coordinierte Breite bedeutet, so wird

$$e^{-ciz} = \operatorname{tg}\left(45 + \frac{w}{2}\right)^c (\cos cu - i \sin cu)$$

$$e^{-2ciz} = \operatorname{tg}\left(45 + \frac{w}{2}\right)^{2c} (\cos 2cu - i \sin 2cu).$$

Der erste Ausdruck wird Null oder unendlich für $w = \pm 90^0$, also für die beiden Pole; der zweite Ausdruck wird gleich $-\operatorname{tg}\left(45 + \frac{w_0}{2}\right)^{2c}$ für $w = w_0$ und $2cu = 180$, d. h. in dem Schnittpunkt des geradlinigen Parallels in der Länge von 180^0, also im Antipodenpunkte des Kartenmittelpunktes; es können also Discontinuitäten nur in diesen Punkten stattfinden, sonst ist überall Ähnlichkeit in den kleinsten Theilen.

wobei man die Constante $C = 0$ setzen kann, weil $f(z) = x + iy$ ist, also die Constante C, nach rechts geschafft sich mit x verbindet, und $x - C = x_1$ ebenfalls eine Abscisse in einem um C gegen das frühere in der Richtung der x verschobenen Coordinatensysteme ist. Welche Werte man auch den 3 Constanten M, N, α beilegt, immer wird die Eingangs gestellte Bedingung, dass die Meridiane und Parallelen kreisförmig sind, erfüllt sein; wir setzen:

$$M = -Ai, \qquad N = -Bi; \qquad \alpha = -ci$$

und erhalten[1])

$$f(u + iv''') = f(z) = \frac{i}{Ae^{-2ciz} + B} = \frac{ie^{icz}}{Ae^{-icz} + Be^{icz}}$$

$$x + iy = i\,\frac{e^{-c(v'''-iu)}}{Ae^{c(v'''-iu)} + Be^{-c(v'''-iu)}}.$$

Multipliciert man Zähler und Nenner mit

$$Ae^{c(v'''+iu)} + Be^{-c(v'''+iu)}$$

und zerlegt in den reellen und den imaginären Theil, so kömmt:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{A \sin 2cu}{A^2e^{2cv'''} + 2AB\cos 2cu + B^2e^{-2cv'''}} \\ y &= \frac{A\cos 2cu + Be^{-2cv'''}}{A^2e^{2cv'''} + 2AB\cos 2cu + B^2e^{-2cv'''}} \end{aligned}\right\}. \tag{48}$$

Dass die Netzlinien Kreise sein werden, ist a priori bekannt, da die Funktion f darnach bestimmt war; um aber auch ihre Gleichungen zu erhalten, muss der bereits wiederholt verwendete Weg eingeschlagen werden.

Eliminiert man v''', so erhält man die Gleichung des Meridians von der Länge u;[2]) eliminiert man u, so erhält man die Gleichung des Parallels von der Breite v, für welchen

$$v''' = \log_n\left\{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{v}{2}\right)\left(\frac{1 - \varepsilon\sin v}{1 + \varepsilon\sin v}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\right\}.$$

Man hat zunächst:

$$x^2 + y^2 = \frac{A^2 + 2ABe^{-2cv'''}\cos 2cu + B^2e^{-4cv'''}}{(A^2e^{2cv'''} + 2AB\cos 2cu + B^2e^{-2cv'''})^2}$$

$$= \frac{(A^2e^{2cv'''} + 2AB\cos 2cu + B^2e^{-2cv'''})\,e^{-2cv}}{(A^2e^{2cv'''} + 2AB\cos 2cu + B^2e^{-2cv'''})^2}$$

$$= \frac{e^{-2cv'''}}{A^2e^{2cv'''} + 2AB\cos 2cu + B^2e^{-2cv'''}},$$

---

1) *Lagrange* nennt c den *Exponenten* der Projektion.

2) Es ist zu bemerken, dass die Projektion b) aus dieser hervorgeht, für

$$B = 0, \qquad A = 1, \qquad c = \frac{m}{2}$$

demnach

$$\frac{y}{x^2+y^2} = Ae^{2cv'''}\cos 2cu + B$$

$$\frac{x}{x^2+y^2} = -\,Ae^{2cv'''}\sin 2cu.$$

Hieraus erhält man, indem man in der ersten Gleichung B nach links schafft, und die beiden Gleichungen durch einander dividiert

$$\frac{y - B(x^2+y^2)}{x} = -\cot 2cu$$

$$\frac{y + x\cot 2cu}{B} = x^2 + y^2,$$

oder

$$\left(x - \frac{\cot 2cu}{2B}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2B}\right)^2 = \frac{1}{4B^2\sin 2cu^2} \qquad (49\text{a})$$

Es sind daher für diesen Kreis die Coordinaten des Mittelpunktes

$$x_0 = \frac{\cot 2cu}{2B};\quad y_0 = \frac{1}{2B}$$

und sein Halbmesser

$$r_0 = \frac{1}{2B\sin 2cu}.$$

Die Gleichung (49a) wird erfüllt für $x = 0$, $y = 0$, und für $x = 0$, $y = \frac{1}{B}$; da also durch diese beiden Punkte alle Meridiane gehen, so repräsentieren sie die beiden Pole; die Y-Axe selbst ist der erste Meridian.

Schafft man wieder B auf die linke Seite, quadriert und addiert, so folgt

$$\left(\frac{y}{x^2+y^2} - B\right)^2 + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} = A^2e^{4cv'''},$$

oder entwickelt:

$$y^2 - 2B(x^2+y^2)\,y + (x^2+y^2)^2B^2 + x^2 = A^2e^{4cv'''}(x^2+y^2)^2$$

$$(x^2+y^2) - 2By\,(x^2+y^2) = (A^2e^{4cv'''} - B^2)(x^2+y^2)^2$$

und wenn man durch $x^2 + y^2$ abkürzt, da dieser Ausdruck nur für den isolierten Punkt $x = y = 0$ verschwinden kann,

$$1 - 2By = (A^2e^{4cv'''} - B^2)(x^2+y^2)$$

$$x^2 + y^2 + \frac{2By}{A^2e^{4cv'''} - B^2} = \frac{1}{A^2e^{4cv'''} - B^2}$$

$$x^2 + \left(y + \frac{B}{A^2e^{4cv'''} - B^2}\right)^2 = \frac{A^2e^{4cv'''}}{(A^2e^{4cv'''} - B^2)^2} \qquad (49\text{b})$$

Die Coordinaten des Mittelpunktes und der Halbmesser des Parallelkreises sind also

$$x_0 = 0,\quad y_0 = -\frac{B}{A^2e^{4cv'''} - B^2};\qquad r_0 = \frac{Ae^{2cv'''}}{A^2e^{4cv'''} - B^2}.$$

Zur Bestimmung des Vergrösserungsverhältnisses findet man

$$\frac{dx}{du} = -\frac{(A^2 e^{2cv'''} + B^2 e^{-2cv'''})\, 2Ac \cos 2cu + 4A^2 Bc}{(A^2 e^{2cv'''} + 2AB \cos 2cu + B^2 e^{-2cv'''})^2}$$

$$\frac{dy}{du} = -\frac{(A^2 e^{2cv'''} + B^2 e^{-2cv'''})\, 2Ac \sin 2cu - 4AB^2 c e^{-2cv'''} \sin 2cu}{(A^2 e^{2cv'''} + 2AB \cos 2cu + B^2 e^{-2cv'''})^2},$$

folglich nach gehöriger Reduction:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 = \frac{4A^2c^2}{(A^2 e^{2cv'''} + B^2 e^{-2cv'''} + 2AB \cos 2cu)^2},$$

woraus das Vergrösserungsverhältnis folgt:

$$k = \frac{2Ac\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin v^2}}{(A^2 e^{2cv'''} + 2AB \cos 2cu + B^2 e^{-2cv'''})\, A_0 \cos v},$$

wo zur Unterscheidung von der Constanten A der die Abbildung definierenden Funktion der Äquatorhalbmesser der Meridianellipse mit A_0 bezeichnet ist.

Es sollen nun für A und B andere Constanten eingeführt werden. In der Karte waren die Coordinaten der beiden Pole

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \quad \text{und} \quad \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \frac{1}{B} \end{array}\right\}.$$

Soll die Entfernung der beiden Pole $2d$ sein, so muss

$$\frac{1}{B} = 2d$$

sein und damit wird die Gleichung der Meridiane

$$(y - d)^2 + (x - d \cot 2cu)^2 = d^2 \operatorname{cosec} 2cu^2.$$

Die Coordinaten der Mittelpunkte sind $x = d \cot 2cu$, $y = d$. Sind also (Fig. 62) P, P' die beiden Pole der Karte, halbiert man PP' in Q, zieht durch Q die Parallele zur X-Axe, so liegen die Mittelpunkte sämmtlicher Meridiane in dieser Geraden. Macht man $xPz = 2cu$, so ist M der Mittelpunkt des Meridians von der Länge u.

Nachdem

$$v''' = \log_n \left\{ \operatorname{tg}\left(45 + \frac{v}{2}\right) \left(\frac{1 - \varepsilon \sin v}{1 + \varepsilon \sin v}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \right\}$$

$$= \log_n \operatorname{tg}\left(45 + \frac{w}{2}\right)$$

ist, wenn w die coordinierte Breite ist, so ist

$$e^{4cv'''} = \operatorname{tg}\left(45 + \frac{w}{2}\right)^{4c}.$$

Setzt man nun $\frac{A}{B} = \alpha$, so erhält man für die Coordinaten des Mittelpunktes des Parallelkreises

$$x_0 = 0$$
$$y_0 = -\frac{2d}{\alpha^2 \operatorname{tg}\left(45 + \frac{w}{2}\right)^{4c} - 1}$$

und für den Halbmesser

$$r = \frac{2\alpha d \operatorname{tg}\left(45 + \frac{w}{2}\right)^{2c}}{\alpha^2 \operatorname{tg}\left(45 + \frac{w}{2}\right)^{4c} - 1},$$

daher die Gleichung des Parallelkreises

$$x^2 + \left(y + \frac{2d}{\alpha^2 \operatorname{tg}\left(45 + \frac{w}{2}\right)^{4c} - 1}\right)^2 = \left(\frac{2\alpha d \operatorname{tg}\left(45 + \frac{w}{2}\right)^{2c}}{\alpha^2 \operatorname{tg}\left(45 + \frac{w}{2}\right)^{4c} - 1}\right)^2.$$

Soll der Parallelkreis, dessen coordinierte Breite w_0 ist, durch die Gerade QM dargestellt werden, welche im Halbierungspunkte der Geraden PP' auf dieser senkrecht steht, so wird der Halbmesser dieses Parallels und die Ordinate seines Mittelpunktes unendlich, daher:

$$\frac{2d}{\alpha^2 \operatorname{tg}\left(45 + \frac{w_0}{2}\right)^{4c} - 1} = \infty,$$

oder

$$\alpha^2 = \cot\left(45 + \frac{w_0}{2}\right)^{4c}.$$

Setzt man nun Kürze halber[1])

$$\alpha \operatorname{tg}\left(45 + \frac{w}{2}\right)^{2c}$$
$$= \cot\left(45 + \frac{w_0}{2}\right)^{2c} \operatorname{tg}\left(45 + \frac{w}{2}\right)^{2c}$$
$$= n,$$

so wird für irgend einen Parallelkreis

$$x_0 = 0; \quad y_0 = -\frac{2d}{n^2 - 1}$$
$$r = \frac{2dn}{n^2 - 1}$$

und dem absoluten Werte nach

$$r = n y_0.$$

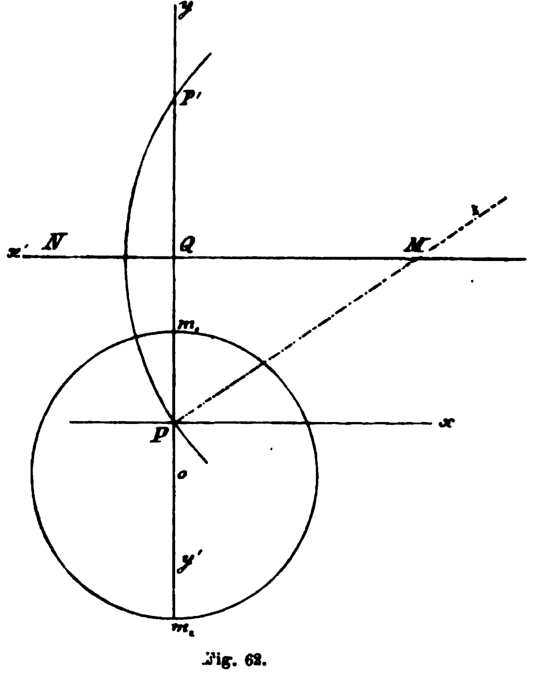


Fig. 62.

Aus der Gleichung des Parallelkreises

$$x^2 + y^2 + \frac{4dy}{n^2 - 1} = \frac{4d^2}{n^2 - 1}$$

---

1) Eigentlich $\pm \cot\left(45 + \frac{w_0}{2}\right)^{2c}$; eine Änderung des Zeichens bewirkt aber nur eine Vertauschung der beiden Schnittpunkte y_1 und y_2 des Parallelkreises mit der Y-Axe und eine Änderung des Zeichens von r.

ist ersichtlich, dass für $x = 0$

$$y = -\frac{2d}{n^2-1} \pm \frac{2nd}{n^2-1}.$$

Man erhält also für die Schnittpunkte des Parallels mit dem ersten Meridian

$$y_1 = \frac{2d}{n+1}; \quad y_2 = -\frac{2d}{n-1}.$$

Der erste ist der zwischen P und P' fallende Punkt m_1.

Ist also

$$m_1 P = y_1; \qquad m_1 P' = y_1',$$

so ist

$$y_1 = \frac{2d}{n+1},$$

daher

$$y_1' = 2d - \frac{2d}{n+1} = \frac{2dn}{n+1},$$

folglich

$$n = \frac{y_1'}{y_1}.$$

Es bedeutet also

$$n = \cot\left(45 + \frac{w_0}{2}\right)^{2c} \operatorname{tg}\left(45 + \frac{w}{2}\right)^{2c}$$

das Abstandsverhältnis des Punktes, dessen coordinierte Breite w ist, von den beiden Polen.

Führt man die Constanten d, α und die Variable n in die Gleichungen (48) ein, so wird

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{2nd \sin 2cu}{1 + 2n \cos 2cu + n^2} \\ y &= \frac{2d(1 + n\cos 2cu)}{1 + 2n\cos 2cu + n^2} \end{aligned}\right\} . \tag{48a}$$

und der Ausdruck für das Vergrösserungsverhältnis wird

$$k = \frac{4dnc\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin v^2}}{(1 + 2n\cos 2cu + n^2)\, A_0 \cos v}.$$

Die Ausdrücke (48a) können dazu dienen die Netzlinien zu zeichnen, wenn die Mittelpunkte derselben nicht auf das Zeichenblatt fallen.

In den bisherigen Ausdrücken war der Mittelpunkt des Axensystemes der Pol P. Legt man jedoch, wie dies mitunter praktisch ist, das Axensystem zu Grunde dessen Mittelpunkt Q ist, und vertauscht die positive und negative Y-Axe, so also, dass QP die positive Y-Axe, QN die positive X-Axe ist, so wird in diesem neuen Systeme

$$x' = -x, \qquad y' = d - y,$$

oder

$$y = d - y',$$

somit

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{2nd \sin 2cu}{1 + 2n \cos 2cu + n^2} \\ y' &= \frac{d(n^2 - 1)}{1 + 2n \cos 2cu + n^2} \end{aligned}\right\}. \tag{50}$$

Die Gleichung des Meridians wird

$$(x' + d \cot 2cu)^2 + y'^2 = d^2 \operatorname{cosec} 2cu^2. \tag{50a}$$

Die Gleichung der Parallelkreise

$$x'^2 + \left(y' - \frac{n^2+1}{n^2-1}\, d\right)^2 = \frac{4d^2n^2}{(n^2-1)^2}\,. \tag{50b}$$

Die Entfernung der Schnittpunkte m_1, m_2 von Q sind demnach

$$y_1' = + \frac{n-1}{n+1}\, d\,; \qquad y_2' = + \frac{n+1}{n-1}\, d. \tag{50c}$$

Ist $w \gtrless w_0$, so wird, da w und w_0 kleiner als 90° sein müssen,

$$\operatorname{tg}\left(45 + \frac{w}{2}\right) \gtrless \operatorname{tg}\left(45 + \frac{w_0}{2}\right),$$

demnach

$$\operatorname{tg}\left(45 + \frac{w}{2}\right) \cot\left(45 + \frac{w_0}{2}\right) \gtrless 1,$$

also

$$n \gtrless 1.$$

Die Parallelkreise, deren Breiten grösser als w_0 sind, liegen also auf der positiven Seite der y'; diejenigen für welche die Breite kleiner als w_0 ist, haben sämmtlich negative y_1' und y_2'.

In den hier abgeleiteten Ausdrücken kommen noch die Constanten d, w_0 (an Stelle von α) und c vor, über welche man nach Belieben verfügen kann. d bestimmt den Massstab der Karte, und ist ganz willkürlich, so dass noch w_0 und c zu bestimmen bleiben. Wenn $w_0 = 0$, so wird QM den Äquator darstellen, und es wird

$$n = \operatorname{tg}\left(45 + \frac{w}{2}\right)^{2c}.$$

An Stelle der Constanten c könnte man auch eine andere γ einführen, welche bestimmt ist durch $\gamma = dc$; ist der Massstab der Karte (d) bestimmt, und hat man für c eine Wahl getroffen, so ist damit auch γ bestimmt. Im allgemeinen wird es keinen Vortheil bringen c durch γ zu ersetzen; wenn wir jedoch $c = 0$ setzen, so wird $d = \infty$ werden müssen, wenn γ eine *endliche* nicht verschwindende Constante bedeutet. Für diesen Fall würden die Halbmesser der Meridiane, weil die Constante nicht verschwindet, unendlich, die Meridiane also geradlinig und senkrecht auf der X'-Axe, weil allgemein ihr Mittelpunkt in der X'-Axe liegt; ebenso sind aber auch die Parallelen geradlinig und senkrecht auf der Y'-Axe, weil allgemein ihre Mittelpunkte in der Y'-Axe liegen und $n = 1$, und $d = \infty$, demnach $\frac{2dn}{(n^2-1)} = \infty$ ist. In der That wird dies die *Mercator*'sche Seekarten-

projektion; denn der Meridian von der Länge u schneidet die X'-Axe in einer Entfernung, welche man erhält, indem man in (50a) $y' = 0$ setzt; dann wird allgemein

$$x' = d\,(\operatorname{cosec} 2cu - \cot 2cu) = d\,\frac{1 - \cos 2cu}{\sin 2cu} = d \operatorname{tg} cu,$$

daher für den betrachteten Spezialfall

$$x' = d\,(cu + \tfrac{1}{3}c^3u^3 + \cdots) = dcu\,(1 + \tfrac{1}{3}c^2u^2 + \cdots) = \gamma u.$$

Die Abstände der zu gleichen Längendifferenzen gehörigen Meridiane sind daher äquidistant.

Für die Meridiane ist, weil der Zähler unendlich, der Nenner Null wird, $y_2' = \infty$, wie ja selbstverständlich; ferner

$$y_1' = \frac{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{w}{2}\right)^{2c} - 1}{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{w}{2}\right)^{2c} + 1} \cdot d.$$

Für $c = 0$ wird der Wert des Nenners 2, und

$$\left[\operatorname{tg}\left(45 + \frac{w}{2}\right)^{2c} - 1\right] d = \frac{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{w}{2}\right)^{2c} - 1}{c}\,\gamma$$

erhält den Wert $\frac{0}{0}$; sein wahrer Wert ist gleich dem Quotienten des Differentialquotienten des Zählers, durch den Differentialquotienten des Nenners genommen nach der verschwindenden Grösse c, folglich [1]) gleich

$$\left\{\frac{2 \operatorname{tg}\left(45 + \frac{w}{2}\right)^{2c} \log_n \operatorname{tg}\left(45 + \frac{w}{2}\right)}{1}\right\}_{c=0} \gamma = 2\gamma \log_n \operatorname{tg}\left(45 + \frac{w}{2}\right),$$

woraus

$$y_1' = \gamma \log_n \operatorname{tg}\left(45 + \frac{w}{2}\right).$$

Lagrange, von dem diese Projektion herrührt, giebt auch mehrere Bestimmungsarten von c. Das Vergrösserungsverhältnis ist, wie man sieht, von v und u abhängig; unter gleichen Breiten wird es am kleinsten, wenn $\cos 2cu$ am grössten wird, also für $u = 0$, d. h. im Meridian des Kartenmittelpunktes, hier wird dasselbe, wenn wir uns im Folgenden der Einfachheit halber auf die Kugel beschränken,

$$k = \frac{4cd}{\left[\operatorname{tg}\left(45 + \frac{v_0}{2}\right)^{2c} \cot\left(45 + \frac{v}{2}\right)^{2c} + 2 + \cot\left(45 + \frac{v_0}{2}\right)^{2c} \operatorname{tg}\left(45 + \frac{v}{2}\right)^{2c}\right] a \cos v},$$

wenn a der Halbmesser der Kugel ist; oder

$$k = \frac{4cd}{\left[\operatorname{tg}\left(45 + \frac{v_0}{2}\right)^{c} \cot\left(45 + \frac{v}{2}\right)^{c} + \cot\left(45 + \frac{v_0}{2}\right)^{c} \operatorname{tg}\left(45 + \frac{v}{2}\right)^{c}\right]^2 a \cos v}$$

Für $v = v_0$ wird

$$k_0 = \frac{cd}{a \cos v_0}.$$

---

1) Weil $\frac{d a^x}{dx} = a^x \log_n a$.

Der Ausdruck für k wird für ein gegebenes c ein Minimum, wenn die Quadratwurzel aus dem Nenner zu einem Maximum wird. Ist also

$$N = \sqrt{\cos v}\left[\operatorname{tg}\left(45 + \frac{v_0}{2}\right)^c \cot\left(45 + \frac{v}{2}\right)^c + \cot\left(45 + \frac{v_0}{2}\right)^c \operatorname{tg}\left(45 + \frac{v}{2}\right)^c\right],$$

so wird

$$\frac{\partial N}{\partial v} = -\frac{\sin v}{2\sqrt{\cos v}}\left[\operatorname{tg}\left(45 + \frac{v_0}{2}\right)^c \cot\left(45 + \frac{v}{2}\right)^c + \cot\left(45 + \frac{v_0}{2}\right)^c \operatorname{tg}\left(45 + \frac{v}{2}\right)^c\right]$$

$$+ \frac{c}{2}\sqrt{\cos v}\left[-\operatorname{tg}\left(45 + \frac{v_0}{2}\right)^c \frac{\cot\left(45 + \frac{v}{2}\right)^{c-1}}{\sin\left(45 + \frac{v}{2}\right)^2} + \cot\left(45 + \frac{v_0}{2}\right)^c \frac{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{v}{2}\right)^{c-1}}{\cos\left(45 + \frac{v}{2}\right)^2}\right].$$

Setzt man für den Augenblick Kürze halber

$$\operatorname{tg}\left(45 + \frac{v_0}{2}\right)^c \cot\left(45 + \frac{v}{2}\right)^c = \mu,$$

so wird diese Gleichung, indem man den Nenner $2\sqrt{\cos v}$, der nicht ∞ werden kann, weglässt,

$$-\sin v\left[\mu + \frac{1}{\mu}\right] + c\cos v\left[-\frac{2\mu}{\cos v} + \frac{2}{\mu\cos v}\right] = 0,$$

oder

$$-\sin v\left[\mu + \frac{1}{\mu}\right] - 2c\left[\mu - \frac{1}{\mu}\right] = 0.$$

Der Wert v_1, für welchen k ein Minimum ist, folgt daher aus der Gleichung

$$\frac{\mu_1^2 + 1}{\mu_1^2 - 1} = -\frac{2c}{\sin v_1},$$

wobei

$$\mu_1 = \operatorname{tg}\left(45 + \frac{v_0}{2}\right)^c \cot\left(45 + \frac{v_1}{2}\right)^c = \frac{1}{\sqrt{n_1}},$$

also

$$\frac{n_1 + 1}{n_1 - 1}\sin v_1 = 2c, \tag{51}$$

oder

$$\frac{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{v_1}{2}\right)^{2c} + \operatorname{tg}\left(45 + \frac{v_0}{2}\right)^{2c}}{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{v_1}{2}\right)^{2c} - \operatorname{tg}\left(45 + \frac{v_0}{2}\right)^{2c}}\sin v_1 = 2c \tag{51a}$$

und der absolute Wert k_1 des Minimums der Vergrösserung wird erhalten, wenn man in dem Ausdruck für k den aus (51) folgenden Wert

$$n_1 = \frac{2c + \sin v_1}{2c - \sin v_1}$$

substituiert; er ergiebt sich zu

$$k_1 = \frac{d\,(4c^2 - \sin v_1^2)}{4ac \cos v_1}.$$

Es kann nun c so bestimmt werden, dass für einen gegebenen Punkt, dessen geographische Breite v' ist, k ein Minimum werde. Der Meridian dieses Punktes muss dann als erster Meridian gewählt werden, oder anders ausgesprochen, der gewählte Punkt muss im Meridian des Kartenmittelpunktes liegen und c der Gleichung (51a) entsprechen, wenn v' für v_1 gesetzt wird (v_0 ist dabei bekanntlich die geographische Breite des Parallels des Kartenmittelpunktes, also desjenigen Parallels, dessen Bild geradlinig ist). Für $c = 0$ erhält man, wie schon erwähnt die *Mercator*'sche Seekartenprojektion. Für $c = \frac{1}{2}$ erhält man die stereographische Projektion; es wird:

$$\left.\begin{aligned} x' &= + \frac{2nd \sin u}{1 + 2n \cos u + n^2} \\ y' &= + \frac{d\,(n^2 - 1)}{1 + 2n \cos u + n^2} \end{aligned}\right\} \; n = \operatorname{tg}\left(45 + \frac{v}{2}\right) \cot\left(45 + \frac{v_0}{2}\right).$$

Die Coordinaten der Mittelpunkte der Parallelkreise sind:

$$x_0' = 0, \qquad y_0' = \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1}\, d$$

diejenigen der Meridiane:

$$x_0' = -\, d \cot u, \qquad y_0' = 0,$$

also für eine Äquatorealprojektion, für welche $v_0 = 0$, wird

$$n = \operatorname{tg}\left(45 + \frac{v}{2}\right),$$

daher die Coordinaten der Mittelpunkte der Parallelkreise

$$x_0' = 0, \quad y_0' = \frac{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{v}{2}\right)^2 + 1}{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{v}{2}\right)^2 - 1}\, d = d \operatorname{cosec} v$$

und diejenigen der Mittelpunkte der Meridiane

$$x_0' = -\, d \cot u, \qquad y_0' = 0.$$

Wenn $c = \frac{1}{4}$, so sind die Winkel an den Polen $\frac{1}{2}u$, also höchstens 90^0: man kann also die ganze Erdkugel in Form eines Kreises darstellen. Nimmt man $v_0 = 0$, also das Bild des Äquators geradlinig, so wird:

$$n = \sqrt{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{v}{2}\right)},$$

daher die Coordinaten der Mittelpunkte der Parallelkreise

$$x_0 = 0, \qquad y_0 = -\frac{2d}{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{v}{2}\right) - 1}$$

und die Schnittpunkte mit der Y-axe

$$y_1 = \frac{2d}{\sqrt{\operatorname{tg}\left(45+\frac{v}{2}\right)}+1}\,;\quad y_2 = -\frac{2d}{\sqrt{\operatorname{tg}\left(45+\frac{v}{2}\right)}-1}\,.$$

Hieraus folgen die Entfernungen derselben von Q:

$$\xi_1 = Qm_1 = d - y_1 = d\,\frac{\sqrt{\sin\left(45+\frac{v}{2}\right)} - \sqrt{\sin\left(45-\frac{v}{2}\right)}}{\sqrt{\sin\left(45+\frac{v}{2}\right)} + \sqrt{\sin\left(45-\frac{v}{2}\right)}}$$

$$\xi_2 = Qm_2 = d - y_2 = d\,\frac{\sqrt{\sin\left(45+\frac{v}{2}\right)} + \sqrt{\sin\left(45-\frac{v}{2}\right)}}{\sqrt{\sin\left(45+\frac{v}{2}\right)} - \sqrt{\sin\left(45-\frac{v}{2}\right)}}\,.$$

Tafel 19 giebt die Werte von ξ_1, ξ_2 für $d = 1$. Hiermit lässt sich das Kartennetz sehr einfach zeichnen; die Mittelpunkte der Meridiane werden erhalten, indem man den Winkel ZPQ (Fig. 63) z. B. in 9 Theile theilt, (wenn die Meridiane von 20° zu 20° gezogen werden sollen) und die Theilungslinien bis Qx verlängert. Für die Parallelkreise trägt man sich aus der Tafel die Werte ξ_1 und ξ_2 von Q gegen P auf, und zieht durch m_1 m_2 die Kreise, deren Mittelpunkte in PQ liegen.

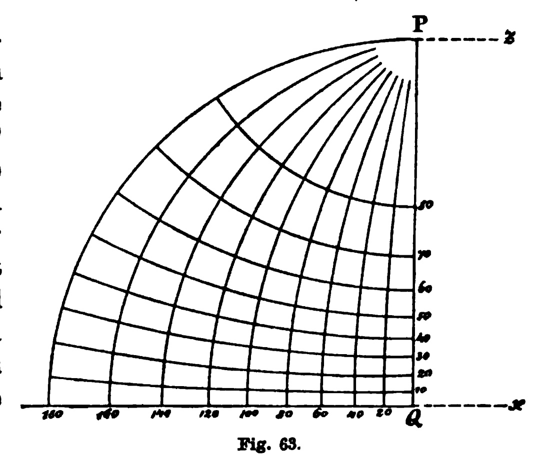


Fig. 63.

Fig. 63 stellt einen Quadranten des Netzes in dieser Projektion dar, wobei die Meridiane von 20° zu 20°, die Parallelkreise von 10° zu 10° gezogen sind. Natürlich sind die drei anderen Quadranten völlig symmetrisch.

52. *e*) *C. S. Peirce* giebt im zweiten Bande (1879) des American Journal of Mathematics eine neue conforme Projektion, die er *Quincunctialprojektion* nennt.[1]) Sei

$$f(z) = -\frac{i}{\sqrt{1-\varkappa^2}}\int_0^z \frac{e^{iz}\,dz}{\sqrt{\left(1-e^{2iz}\right)\left(1+\frac{\varkappa^2}{1-\varkappa^2}e^{2iz}\right)}} \tag{52}$$

und

$$x + iy = f(u + iv''').$$

1) A Quincunctialprojektion of the Sphere. l. c. pag. 394.

Setzt man hier

$$z = -i \log_n t,$$

so wird

$$t = e^{iz}$$

und hiermit

$$f(z) = -\frac{1}{\sqrt{1-\varkappa^2}} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(1+\frac{\varkappa^2}{1-\varkappa^2}t^2\right)}}.$$

Da nun

$$t = e^{i(u+iv''')} = e^{-v'''}(\cos u + i \sin u)$$

$$= \operatorname{tg}\left(45 - \frac{v}{2}\right)\left(\frac{1+\varepsilon \sin v}{1-\varepsilon \sin v}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} (\cos u + i \sin u)$$

ist, und

$$x + iy = -\frac{1}{\sqrt{1-\varkappa^2}} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(1+\frac{\varkappa^2}{1-\varkappa^2}t^2\right)}}$$

also, wenn

$$t = \cos \varphi$$

gesetzt wird:

$$x + iy = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin \varphi^2}}$$

demzufolge

$$\varphi = \operatorname{am}(x+iy); \quad t = \cos \operatorname{am}(x+iy); \quad (\operatorname{mod} \varkappa)$$

ist, so wird:

$$\cos \operatorname{am}(x+iy, \varkappa) = \operatorname{tg}\left(45 - \frac{w}{2}\right)(\cos u + i \sin u),$$

welche Formel *Peirce* der Projektion zu Grunde legt.

Um jedoch auf die von *Peirce* gegebene Tafel zur Construktion dieser Projektion überzugehen, muss man den Anfangspunkt des Coordinatensystems in der Richtung der x verschieben; setzt man also $x = x_1 + K$, und schreibt wieder x an Stelle von x_1, so wird die zu verwendende Formel

$$\cos \operatorname{am}(x+iy+K, \varkappa) = \operatorname{tg}\left(45 - \frac{w}{2}\right)(\cos u + i \sin u). \quad (52\text{a})$$

Für $w = +90^0$ wird der Nordpol, für $w = -90^0$ der Südpol dargestellt. Im ersten Falle ist aber $\operatorname{tg}\left(45 - \frac{w}{2}\right)$ gleich Null, im zweiten gleich unendlich. Die Bilder der beiden Pole werden demnach erhalten, wenn man $\cos \operatorname{am}(x+iy+K, \varkappa)$ gleich Null oder unendlich setzt. Nun verschwindet $\cos \operatorname{am} \omega$ für

$$\omega = \frac{\Omega}{4} + m\frac{\Omega}{2} + n\left(\frac{\Omega}{2} + \Omega'\right),$$

wenn Ω und Ω' die beiden Elementarperioden von sin am ω, demnach Ω und $\frac{\Omega}{2} + \Omega'$ die Elementarperioden der cos am ω sind; ferner wird cos am ω unendlich, wenn

$$\omega = \frac{\Omega'}{2} + m\frac{\Omega}{2} + n\left(\frac{\Omega}{2} + \Omega'\right).$$

Ist nun für einen reellen Modul $\varkappa$:

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}$$

$$K' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa_1^2 z^2)}}$$

wo $\varkappa_1$ der complementäre Modul ist, also

$$\varkappa^2 + \varkappa_1^2 = 1,$$

so sind die Elementarperioden der sin am ω:

$$\Omega = 4K; \quad \Omega' = 2iK'.$$

Es wird demnach das Bild des Nordpoles erhalten, wenn

$$x + iy + K = K + 2mK + 2n(K + iK'),$$

also

$$\begin{cases} x = 2mK + 2nK \\ y = 2nK' \end{cases}$$

oder

$$\begin{cases} x = 2\mu K \\ y = 2\nu K'; \end{cases}$$

ebenso das Bild des Südpoles, wenn

$$x + iy + K = iK' + 2mK + 2n(K + iK'),$$

also

$$\begin{cases} x = (2m - 1)K + 2nK \\ y = (2n + 1)K' \end{cases}$$

oder

$$\begin{cases} x = (2\mu + 1)K \\ y = (2\nu + 1)K' \end{cases}$$

Man erhält daher unendlich viele Bilder der beiden Pole, deren Anordnung Fig. 64 zeigt, in welcher $OA = K$, $OB = K'$ ist; O und die mit N bezeichneten Punkte sind die Bilder der Nordpole, S diejenigen der Südpole. Diese Erscheinung hängt mit der doppelten Periodicität der Funktion zusammen, da nämlich $4K$ und $2(K + iK')$ die beiden Perioden der cos am ω sind, so ist

$$\cos \operatorname{am}(x + iy + K + 4mK + 2nK + 2niK') = \cos \operatorname{am}(x + iy + K).$$

Das Bild eines Punktes, dessen Breite v, dessen Länge u ist, wird demnach sowol die Coordinaten x, y, als auch die Coordinaten

$$x_1 = x + 4mK + 2nK$$
$$y_1 = y + 2mK$$

haben, oder anders ausgesprochen: Punkte, deren Coordinaten

$$x_1 = x + 2\mu K$$
$$y_1 = y + 2\nu K$$

sind, stellen dieselben Punkte der Kugel vor. (In Fig. 64 sind solche z. B. die sämmtlichen mit P bezeichneten Punkte.)

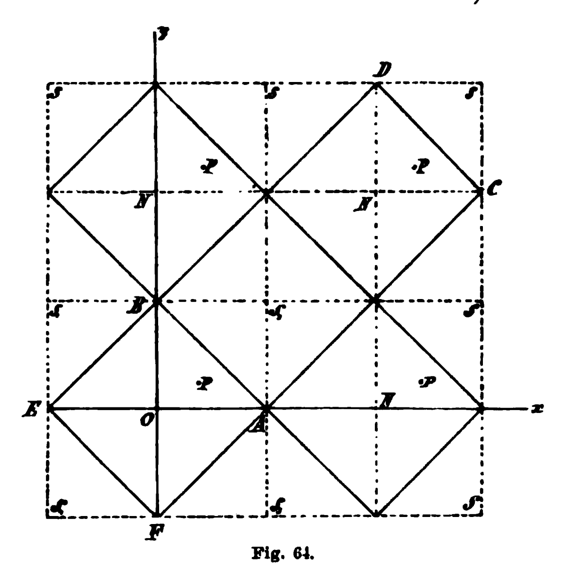


Fig. 64.

Zerlegt man nun cos am $(x + iy + K)$ in den reellen und imaginären Bestandtheil, so ist

$$\cos \operatorname{am} (x + iy + K, \varkappa)$$
$$= \frac{\cos \operatorname{am} (x+K) \cos \operatorname{am} iy - \sin \operatorname{am} (x+K) \sin \operatorname{am} iy \,\Delta \operatorname{am} (x+K)\, \Delta \operatorname{am} iy}{1 - \varkappa^2 \sin \operatorname{am} (x+K)^2 \sin \operatorname{am} iy^2}.$$

Da nun [1])

$$\sin \operatorname{am} (x + K) = \frac{\cos \operatorname{am} x}{\Delta \operatorname{am} x}$$
$$\cos \operatorname{am} (x + K) = -\frac{\varkappa_1 \sin \operatorname{am} x}{\Delta \operatorname{am} x}$$
$$\Delta \operatorname{am} (x + K) = \frac{\varkappa_1}{\Delta \operatorname{am} x}$$
$$\sin \operatorname{am} (iy, \varkappa) = i \operatorname{tg} \operatorname{am} (y, \varkappa_1)$$
$$\cos \operatorname{am} (iy, \varkappa) = \sec \operatorname{am} (y, \varkappa_1)$$
$$\Delta \operatorname{am} (iy, \varkappa) = \frac{\Delta \operatorname{am} (y, \varkappa_1)}{\cos \operatorname{am} (y, \varkappa_1)},$$

1) S. *Jacobi*, „Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum". Gesammelte Werke, herausgegeben von *Borchardt*, I. Bd. pag. 85. *Königsberger*, „Theorie der elliptischen Funktionen" I pag. 398.

so wird, wenn man Kürze halber die Funktion mit dem complementären Modul am $(y, \varkappa_1)$ durch am$' y$ bezeichnet:

$$\cos \operatorname{am}(x + iy + K, \varkappa)$$
$$= -\frac{\varkappa_1 \sin \operatorname{am} x \varDelta \operatorname{am} x \cos \operatorname{am}' y + i\varkappa_1 \cos \operatorname{am} x \sin \operatorname{am}' y \varDelta \operatorname{am}' y}{\varDelta \operatorname{am} x^2 \cos \operatorname{am}' y^2 + \varkappa^2 \cos \operatorname{am} x^2 \sin \operatorname{am}' y^2}.$$

Schreibt man nun $-x$, $-y$ für x, y, was eine Vertauschung der positiven und negativen Seiten der Axen bedeutet, und setzt diesen Ausdruck gleich

$$\operatorname{tg}\left(45 - \frac{w}{2}\right)(\cos u + i \sin u),$$

so wird durch Trennung des reellen vom imaginären

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{tg}\left(45 - \frac{w}{2}\right)\cos u\\ &= \frac{\varkappa_1 \sin \operatorname{am} x \varDelta \operatorname{am} x \cos \operatorname{am}' y}{\varDelta \operatorname{am} x^2 \cos \operatorname{am}' y^2 + \varkappa^2 \cos \operatorname{am} x^2 \sin \operatorname{am}' y^2}\\ &\operatorname{tg}\left(45 - \frac{w}{2}\right)\sin u\\ &= \frac{\varkappa_1 \sin \operatorname{am}' y \varDelta \operatorname{am}' y \cos \operatorname{am} x}{\varDelta \operatorname{am} x^2 \cos \operatorname{am}' y^2 + \varkappa^2 \cos \operatorname{am} x^2 \sin \operatorname{am}' y^2}\end{aligned}\right\}. \tag{53}$$

Der hier auftretende gemeinschaftliche Nenner kann auch in eine andere Form gebracht werden; es ist nämlich

$$\begin{aligned}N &= \varDelta \operatorname{am} x^2 \cos \operatorname{am}' y^2 + \varkappa^2 \cos \operatorname{am} x^2 \sin \operatorname{am}' y^2\\ &= (1 - \varkappa^2 \sin \operatorname{am} x^2)(1 - \sin \operatorname{am}' y^2) + \varkappa^2 (1 - \sin \operatorname{am} x^2) \sin \operatorname{am}' y^2\\ &= 1 - \varkappa^2 \sin \operatorname{am} x^2 - \sin \operatorname{am}' y^2 + \varkappa^2 \sin \operatorname{am}' y^2.\end{aligned}$$

Als Gleichung der Parallelkreise erhält man daher, indem man die Gleichungen (53) quadriert und addiert:

$$\operatorname{tg}\left(45 - \frac{w}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{N^2} \varkappa_1^2 [\sin \operatorname{am} x^2 \varDelta \operatorname{am} x^2 \cos \operatorname{am}' y^2 + \sin \operatorname{am}' y^2 \varDelta \operatorname{am}' y^2 \cos \operatorname{am} x^2].$$

Dividiert man die Gleichungen (53) durcheinander, so erhält man als Gleichung der Meridiane

$$\operatorname{tg} u = \frac{\operatorname{tg} \operatorname{am}' y \varDelta \operatorname{am}' y}{\operatorname{tg} \operatorname{am} x \varDelta \operatorname{am} x}.$$

Von besonderem Interesse ist nun der von *Peirce* behandelte Fall, in welchem

$$\varkappa = \varkappa_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ist, dann wird auch

$$K = K'; \quad \operatorname{am}(y, \varkappa') = \operatorname{am}' y = \operatorname{am} y$$

und der gemeinschaftliche Nenner in (53):

$$N = 1 - \tfrac{1}{2} \sin \operatorname{am} x^2 - \tfrac{1}{2} \sin \operatorname{am} y^2 = \varkappa^2 \cos \operatorname{am} x^2 + \varkappa^2 \cos \operatorname{am} y^2,$$

demnach

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\left(45-\frac{w}{2}\right)\cos u &= \frac{\sin \operatorname{am} x\, \Delta \operatorname{am} x \cos \operatorname{am} y}{\varkappa(\cos \operatorname{am} x^2+\cos \operatorname{am} y^2)} \\ \operatorname{tg}\left(45-\frac{w}{2}\right)\sin u &= \frac{\sin \operatorname{am} y\, \Delta \operatorname{am} y \cos \operatorname{am} x}{\varkappa(\cos \operatorname{am} x^2+\cos \operatorname{am} y^2)}\end{aligned}\right\}. \qquad (53\,a)$$

Seien nun P, P_1 zwei Punkte desselben Parallelkreises, für welche die Längen u und u_1 sich zu 90^0 ergänzen, so also, dass

$$u+u_1=90^0$$

ist, so ist

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\left(45-\frac{w}{2}\right)\cos u_1 &= \operatorname{tg}\left(45-\frac{w}{2}\right)\sin u \\ \operatorname{tg}\left(45-\frac{w}{2}\right)\sin u_1 &= \operatorname{tg}\left(45-\frac{w}{2}\right)\cos u\end{aligned}\right\}. \qquad (n)$$

Sind die Coordinaten der beiden Punkte x, y und x_1, y_1, so wird für den zweiten Punkt

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\left(45-\frac{w}{2}\right)\cos u_1 &= \frac{\sin \operatorname{am} x_1\, \Delta \operatorname{am} x_1 \cos \operatorname{am} y_1}{\varkappa(\cos \operatorname{am} x_1^2+\cos \operatorname{am} y_1^2)} \\ \operatorname{tg}\left(45-\frac{w}{2}\right)\sin u_1 &= \frac{\sin \operatorname{am} y_1\, \Delta \operatorname{am} y_1 \cos \operatorname{am} x_1}{\varkappa(\cos \operatorname{am} x_1^2+\cos \operatorname{am} y_1^2)}\end{aligned}\right\}.$$

Nach den Gleichungen (n) muss nun

$$\frac{\sin \operatorname{am} x_1\, \Delta \operatorname{am} x_1 \cos \operatorname{am} y_1}{\cos \operatorname{am} x_1^2+\cos \operatorname{am} y_1^2} = \frac{\sin \operatorname{am} y\, \Delta \operatorname{am} y \cos \operatorname{am} x}{\cos \operatorname{am} x^2+\cos \operatorname{am} y^2}$$

$$\frac{\sin \operatorname{am} y_1\, \Delta \operatorname{am} y_1 \cos \operatorname{am} x_1}{\cos \operatorname{am} x_1^2+\cos \operatorname{am} y_1^2} = \frac{\sin \operatorname{am} x\, \Delta \operatorname{am} x \cos \operatorname{am} y}{\cos \operatorname{am} x^2+\cos \operatorname{am} y^2}$$

sein, welche Gleichungen erfüllt sind für

$$x=y_1;\quad y=x_1.$$

Diese Beziehung folgt übrigens noch einfacher auf folgende Weise. Es ist

$$\cos \operatorname{am}(x+iy+K)=\operatorname{tg}\left(45-\frac{w}{2}\right)(\cos u+i\sin u).$$

Nun ist (für $\varkappa=\varkappa_1$)

$$\cos \operatorname{am}(y+ix+K) = -\varkappa\frac{\sin \operatorname{am}(y+ix)}{\Delta \operatorname{am}(y+ix)} = -\varkappa\frac{\sin \operatorname{am} i(x-iy)}{\Delta \operatorname{am} i(x-iy)}$$

$$= -\varkappa\frac{i\operatorname{tg}\operatorname{am}(x-iy)}{\dfrac{\Delta \operatorname{am}(x-iy)}{\cos \operatorname{am}(x-iy)}} = -\varkappa\frac{i\sin \operatorname{am}(x-iy)}{\Delta \operatorname{am}(x-iy)}$$

$$= i\cos \operatorname{am}(x-iy+K) = i\operatorname{tg}\left(45-\frac{w}{2}\right)(\cos u-i\sin u)$$

$$= \operatorname{tg}\left(45-\frac{w}{2}\right)(i\cos u+\sin u)$$

$$= \operatorname{tg}\left(45-\frac{w}{2}\right)(\cos u_1+i\sin u_1) = \cos \operatorname{am}(x_1+iy_1+K),$$

demnach

$$y=x_1;\quad x=y_1.$$

(Solche Punkte sind z. B. P und P_1 in Fig. 65.)

Hat man demnach eine Tafel, welche die Werte von x mit den Argumenten u, v giebt, so giebt dieselbe Tafel die y mit dem Argumente $90 - u$, v. Hiernach ist die von *Peirce* construierte Tafel, welche hier als Tafel 21 aufgenommen ist, leicht zu benützen.[1]) Mit dem Argumente φ geht man in die erste Columne ein, welche die zu benützende Horizontalreihe angiebt[2]); mit dem Argumente, Länge $= \lambda$, erhält man in der mit λ_x überschriebenen Columne den zugehörigen Wert von x und in der mit λ_y am Fusse bezeichneten Columne (welche identisch ist mit der auf $(90 - \lambda)_x$ überschriebenen) den Wert von y. Sei z. B. der Punkt, dessen Länge $\lambda = 25^0$ und dessen Breite $\varphi = 35^0$ ist, in die Karte einzutragen; $\varphi = 35^0$ giebt zunächst die Horizontalreihe „400, 398, . . . 036,000“. Mit $\lambda = 25^0$ erhält man in der mit $\lambda_x = 25^0$ überschriebenen Columne in dieser Horizontalreihe den Wert $x = 0{\cdot}358$, und in der für $\lambda_y = 25^0$ geltenden Columne den Wert $y = 0{\cdot}170$; es sind daher die Coordinaten dieses Punktes ($\lambda = 25^0$, $\varphi = 35^0$) $x = 0{\cdot}358$; $y = 0{\cdot}170$. Die Gleichung der Meridiane ist hier wieder:

$$\operatorname{tg} u = \frac{\operatorname{tg} \operatorname{am} y \, \Delta \operatorname{am} y}{\operatorname{tg} \operatorname{am} x \, \Delta \operatorname{am} x}.$$

Für $u = \pm 45^0$ wird diese Gleichung

$$\operatorname{tg} \operatorname{am} y \, \Delta \operatorname{am} y = \pm \operatorname{tg} \operatorname{am} x \, \Delta \operatorname{am} x,$$

welche erfüllt wird für

$$y = \pm x,$$

woraus folgt, dass die unter 45^0 gegen die Axen geneigten Meridiane geradlinig sind.

Die Gleichung der Parallelkreise ist:

$$\frac{\sin \operatorname{am} x^2 \, \Delta \operatorname{am} x^2 \cos \operatorname{am} y^2 + \sin \operatorname{am} y^2 \, \Delta \operatorname{am} y^2 \cos \operatorname{am} x^2}{\varkappa^2 (\cos \operatorname{am} x^2 + \cos \operatorname{am} y^2)^2} = \operatorname{tg}\left(45 - \frac{w}{2}\right)^2.$$

Nun ist aber

$$\sin \operatorname{am} x^2 = 1 - \cos \operatorname{am} x^2$$

$$\Delta \operatorname{am} x^2 = 1 - \varkappa^2 \sin \operatorname{am} x^2 = 1 - \varkappa^2 + \varkappa^2 \cos \operatorname{am} x^2$$
$$= \varkappa_1^2 + \varkappa^2 \cos \operatorname{am} x^2,$$

also für $\varkappa = \varkappa_1$

$$\Delta \operatorname{am} x^2 = \varkappa^2 (1 + \cos \operatorname{am} x^2),$$

folglich, wenn dies eingesetzt wird:

$$\operatorname{tg}\left(45 - \frac{w}{2}\right)^2 = \frac{1 - \cos \operatorname{am} y^2 \cos \operatorname{am} x^2}{\cos \operatorname{am} x^2 + \cos \operatorname{am} y^2}.$$

Für den Äquator wird $w = 0$, daher dessen Gleichung

$$1 - \cos \operatorname{am} y^2 \cos \operatorname{am} x^2 = \cos \operatorname{am} x^2 + \cos \operatorname{am} y^2.$$

1) Als Einheit gilt hierbei K.

2) Die Tafel schreitet von 5^0 zu 5^0 in Längen- und Breitendifferenzen fort. Zwischen $\varphi = 0^0$ und $\varphi = 15^0$, $\lambda = 0^0$ bis $\lambda = 15^0$ sowie $\lambda = 75^0$ bis $\lambda = 90^0$ giebt eine Specialtafel die Coordinaten in engeren Intervallen des Argumentes.

Sucht man hieraus cos am y, so erhält man (für $\varkappa = \varkappa_1$)

$$\cos \operatorname{am} y^2 = \frac{1 - \cos \operatorname{am} x^2}{1 + \cos \operatorname{am} x^2} = \frac{\varkappa^2 \sin \operatorname{am} x^2}{\Delta \operatorname{am} x^2},$$

folglich[1])

$$\cos \operatorname{am} (\pm y) = \pm \frac{\varkappa \sin \operatorname{am} x}{\Delta \operatorname{am} x} = \cos \operatorname{am} (x \mp K),$$

demnach

$$x \pm y = \pm K,$$

wobei keine Correspondenz der Zeichen stattfindet.

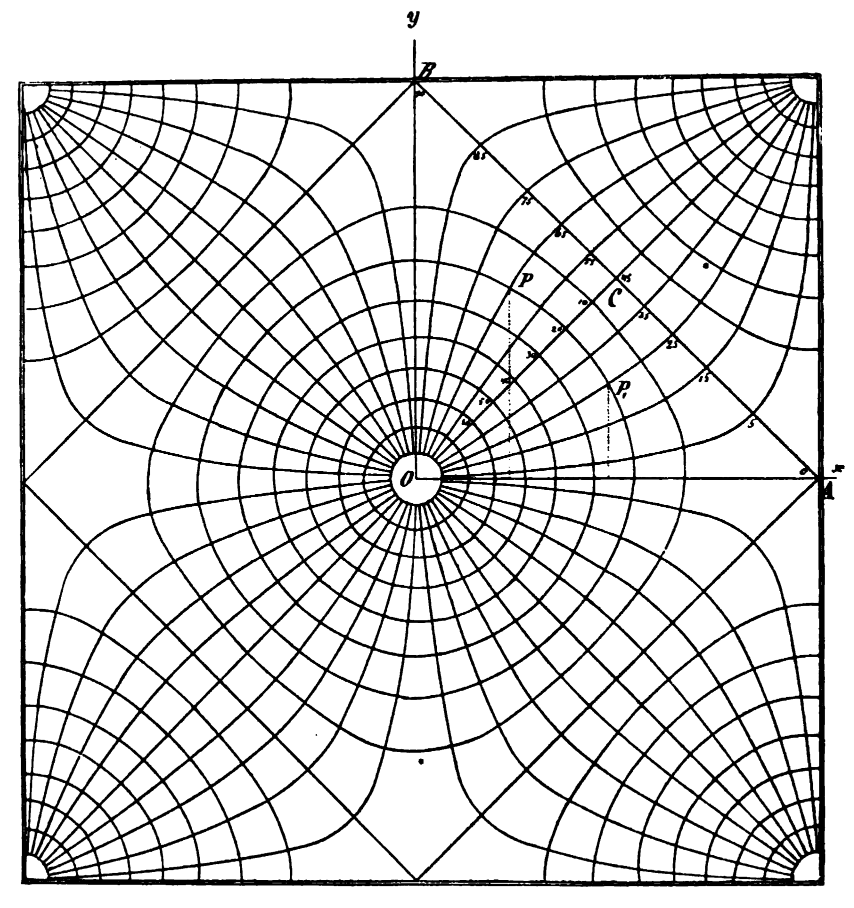


Fig. 65.

Das Bild des Äquators besteht also aus vier Geraden, demnach in Folge der Periodicität aus zwei Geradenschaaren[2]) (die in Fig. 64

1) *Königsberger*, Theorie der elliptischen Funktionen I pag. 398.

2) Die Ähnlichkeit in den kleinsten Theilen kann nur verloren gehen für Punkte in denen $f'(z) = 0$ oder ∞ ist; es ist aber

$$f'(z) = -\frac{i}{\sqrt{1 - \varkappa^2}} \frac{e^{iz}}{\sqrt{(1 - e^{2iz})\left(1 + \frac{\varkappa^2}{1 - \varkappa^2} e^{2iz}\right)}},$$

zu AB und AF parallelen Geraden). Fig. 65 stellt das Gradnetz dieser Projektion dar.

Um auch die Vergrösserungsverhältnisse zu untersuchen, bilden wir

$$W^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2.$$

Nun ist

$$x + iy = f(z); \quad z = u + iv''',$$

demnach

$$\frac{\partial x}{\partial u} + i\frac{\partial y}{\partial u} = f'(z)\frac{\partial z}{\partial u} = f'(z)$$

und da $\varkappa^2 = \varkappa_1{}^2 = \frac{1}{2}$ ist:

$$\frac{\partial x}{\partial u} + i\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{i}{\varkappa}\frac{e^{iz}}{\sqrt{(1-e^{2iz})(1+e^{2iz})}} = -\frac{i}{\varkappa}\frac{e^{iz}}{\sqrt{1-e^{4iz}}}$$

oder

$$\frac{\partial x}{\partial u} + i\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{i}{\varkappa}\frac{e^{-v'''}(\cos u + i\sin u)}{\sqrt{1-e^{-4v'''}(\cos 4u + i\sin 4u)}}.$$

Man hat daher

$$\frac{\partial x}{\partial u} + i\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{i}{\varkappa}\frac{e^{-v'''}(\cos u + i\sin u)}{\sqrt{(1-e^{-4v'''}\cos 4u) - ie^{-4v'''}\sin 4u}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} - i\frac{\partial y}{\partial u} = +\frac{i}{\varkappa}\frac{e^{-v'''}(\cos u - i\sin u)}{\sqrt{(1-e^{-4v'''}\cos 4u) + ie^{-4v'''}\sin 4u}},$$

woraus durch Multiplikation folgt:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 = \frac{1}{\varkappa^2}\frac{e^{-2v'''}}{\sqrt{(1-e^{-4v'''}\cos 4u)^2 + e^{-8v'''}\sin 4u^2}}$$

$$= \frac{1}{\varkappa^2\sqrt{e^{4v'''} - 2\cos 4u + e^{-4v'''}}}$$

Hieraus folgt nun für das Vergrösserungsverhältnis:

$$k^2 = \frac{1-\varepsilon^2\sin v^2}{A^2\cos v^2}\cdot\frac{1}{\varkappa^2\sqrt{e^{4v'''} - 2\cos 4u + e^{-4v'''}}}$$

wobei

$$e^{v'''} = \operatorname{tg}\left(45 + \frac{v}{2}\right)\left(\frac{1-\varepsilon\sin v}{1+\varepsilon\sin v}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} = \operatorname{tg}\left(45 + \frac{w}{2}\right).$$

---

also da $\varkappa = \varkappa_1$ ist

$$f'(z) = -\frac{i}{\varkappa}\frac{1}{\sqrt{(e^{-iz} - e^{iz})(e^{-iz} + e^{iz})}},$$

also für

$$e^{iz} = 0; \quad e^{iz} = \infty; \quad e^{iz} = \pm 1; \quad e^{iz} = \pm i.$$

Da aber

$$e^{iz} = \operatorname{tg}\left(45 - \frac{w}{2}\right)(\cos u + i\sin u),$$

so entspricht den ersten beiden Fällen $w = \pm 90^0$; dem dritten $w = 0^0$ und $u = 0^0$ oder 180^0; dem vierten $w = 0^0$ und $u = 90^0$ oder 270^0. Für $w = \pm 90^0$, d. h. in den beiden Polen besteht noch Ähnlichkeit in den kleinsten Theilen; für $w = 0$, $u = 0$, 90, 180, 270 geht dieselbe thatsächlich verloren. Es ist dies in den Punkten A, B und den analogen in Fig. 64.

Der Maximalwert der Vergrösserung findet statt für $\cos 4u = +1$, also für $u = 0, 90^0, 180^0, 270^0$, d. h. in den geradlinigen Meridianen OA, OB (Fig. 65), welche zu den Ecken des die Halbkugel darstellenden Quadrates gezogen werden. Der Minimalwert von k tritt auf für $\cos 4u = -1$, also für $u = 45^0, 135^0, 225^0, 315^0$, also in jenen geradlinigen Meridianen OS_1, OS_2, OS_3, OS_4, welche gegen die die dargestellte Halbkugel umgebenden Südpole gezogen werden. Um die geographischen Breiten derjenigen Orte in diesen Meridianen zu finden, in denen die absoluten Maxima und Minima stattfinden, hat man

$$\text{für } \cos 4u = +1: \qquad k_1^2 = \frac{1 - \varepsilon^2 \sin v^2}{A^2 \varkappa^2 \cos v^2 \left(e^{2v'''} - e^{-2v'''}\right)}$$

$$\text{für } \cos 4u = -1: \qquad k_2^2 = \frac{1 - \varepsilon^2 \sin v^2}{A^2 \varkappa^2 \cos v^2 \left(e^{2v'''} + e^{-2v'''}\right)}.$$

Da nun

$$e^{2v'''} - e^{-2v'''} = \operatorname{tg}\left(45 + \frac{w}{2}\right)^2 - \cot\left(45 + \frac{w}{2}\right)^2 = 4\,\frac{\sin w}{\cos w^2}$$

$$c^{2v'''} + e^{-2v'''} = \operatorname{tg}\left(45 + \frac{w}{2}\right)^2 + \cot\left(45 + \frac{w}{2}\right)^2 = 2\,\frac{1 + \sin w^2}{\cos w^2},$$

so wird, wenn man sich auf die Kugel beschränkt, in welchem Falle $w = v$ zu setzen ist:

$$k_1^2 = \frac{1}{4 A^2 \varkappa^2 \sin v}; \qquad k_2^2 = \frac{1}{2 A^2 \varkappa^2 (1 + \sin v^2)}.$$

Das absolute Maximum tritt ein für den Maximalwert von k_1, also für $v = 0$, wobei $k_1 = \infty$ wird; doch kommt dieser Wert nicht in Betracht, denn die Punkte, in denen er auftritt, sind die Ecken des Viereckes, innerhalb dessen sich die Halbkugel abbildet, und in diesen wird ja auch die Ähnlichkeit in den kleinsten Theilen nicht stattfinden. Der Minimalwert in diesen Meridianen findet statt für $v = 90^0$, also im Pol; er ist, da $\varkappa^2 = \frac{1}{2}$ ist:

$$k_1^{(0)} = \frac{1}{2A\varkappa} = \frac{1}{A\sqrt{2}}.$$

k_2 wird zum Maximum für $v = 0$, also im Äquator, in den Halbirungspunkten C von AB; dort ist der Wert

$$k_2' = \frac{1}{\sqrt{2}\,A\varkappa} = \frac{1}{A};$$

k_2 wird zum Minimum für $v = 90^0$, und erhält hier (in den Polen) den Wert

$$k_2^{(0)} = \frac{1}{2A\varkappa} = \frac{1}{A\sqrt{2}},$$

also, wie es ja sein muss, gleich $k_1^{(0)}$. Hieraus ersieht man also, dass das absolute Minimum der Vergrösserung im Pole stattfindet. Setzt man den für diesen geltenden Wert als Einheit voraus, so

wird das Vergrösserungsverhältnis für irgend einen anderen Punkt $k' = \frac{k}{k_1^{(0)}}$, also

$$k'^2 = \frac{4}{\cos v^2 \sqrt{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{v}{2}\right)^4 - 2\cos 4u + \cot\left(45 + \frac{v}{2}\right)^4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sin\left(45 + \frac{v}{2}\right)^8 - \frac{1}{8}\cos v^4 \cos 4u + \cos\left(45 + \frac{v}{2}\right)^8}}.$$

Von dem Pole wächst das Vergrösserungsverhältnis nach allen Richtungen; in C (Fig. 65) ist dasselbe, dasjenige in O als Einheit angenommen, gleich $\sqrt{2}$. In den Meridianen OA, OB ist das Vergrösserungsverhältnis, in derselben Einheit ausgedrückt

$$k_1' = \frac{1}{\sqrt{\sin v}},$$

dieses wird auch gleich $\sqrt{2}$, für die Breite v_0, welche sich bestimmt aus

$$\sin v_0 = \tfrac{1}{2},$$

also für $v_0 = 30^0$; für $v = 10^0$ wird dasselbe schon 2·4. Dessenungeachtet ist diese Projektion für die Darstellung der *ganzen Erdoberfläche* sehr geeignet, weil sie ein zusammenhängendes Bild derselben in Form eines Rechteckes $ABCD$ (Fig. 64) giebt, so dass jede Erdhälfte durch ein Quadrat dargestellt wird, oder in Form eines Quadrates $S_1 S_2 S_3 S_4$ nach Art einer Sternprojektion, bei welcher nämlich die eine (z. B. nördliche) Hemisphäre durch das Quadrat $ABEF$ dargestellt ist, an welches sich die rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecke ABS_2, BES_1, EFS_4, AFS_3 anfügen; doch hat diese Projektion den ganz wesentlichen Vortheil, dass man, wenn nötig, jedes dieser Dreiecke conform fortsetzen kann, wie sich dies aus Fig. 65 ergiebt. Eine Anwendung von dieser Projektion hat *Oppolzer* zur Darstellung der Finsternisse gegeben.

Anhang.

Bemerkungen über die Wahl der Projektionen und über das Zeichnen der Karten.

Von den zahlreichen Projektionen, welche im Vorhergehenden behandelt wurden, sind, wie jeder leicht selbst einsehen wird, nicht alle für die Praxis gleich geeignet, und wie schon Eingangs erwähnt wurde, wird es wesentlich von dem Zwecke, welchen der Kartograph vor Augen hat, abhängen, welcher Projektion er den Vorzug geben wird. Strenge genommen, lassen sich hierüber auch keine allgemeinen Regeln aufstellen, und muss es dem inviduellen Ermessen des Praktikers überlassen bleiben, für welche er sich entscheiden wird. Doch sollen im Folgenden mit Rücksicht auf gewisse allgemeine leitende Gesichtspunkte durch Vergleichung der verschiedenen Projektionsmethoden einige Momente hervorgehoben werden, welche in vielen Fällen bei der Wahl der Projektionen zu berücksichtigen sein werden, wobei auch einige praktische Bemerkungen für das Zeichnen der Karten den entsprechenden Platz finden können.

1. Bei der Darstellung von **Planetenoberflächen**,[1]) also für den Mond, Jupiter, Saturn, Mars etc. wird man jedenfalls die *orthographische* Projektion verwenden, weil diese die Himmelskörper so darstellt, wie dieselben von dem Beobachter, den man sich für diese Zwecke ohne Fehler als von dem Objekte unendlich weit denken kann, gesehen werden. Aus demselben Grunde wird man für **Sternkarten** [1]) die *Centralprojektion* wählen können, wenn man bedenkt, dass die Kugel oder deren Centralprojektion auf eine tangierende Ebene, auf ein im Centrum der Kugel befindliches Auge denselben Eindruck macht. Von Wichtigkeit ist es hierbei, zu bemerken, dass sich in der Centralprojektion die grössten Kreise der Sphäre als Gerade darstellen, dass sich demnach Sterne, welche auf der Himmelskugel in einem grössten Kreise liegen, auf der Karte in einer Geraden befinden, so dass man leicht alignieren kann. (Auf einen anderen Vortheil bezüglich der Krümmung der scheinbaren Kometenbahnen wurde bereits

---

1) Welche allerdings nicht Sache der Kartographen, sondern der Astronomen ist.

bei Besprechung der Centralprojektion hingewiesen). Da aber das Auge immer nur einen kleinen Theil der Himmelskugel übersieht, und man strenge genommen den Berührungspunkt, also die der Darstellung zu Grunde gelegte tangierende Ebene, immer in den Mittelpunkt des betrachteten Bereiches verlegen müsste, was auf der Karte nicht geht, so werden weiter vom Kartenmittelpunkte entfernt, die Constellationen bedeutend verändert, daher auch, wenn nicht specielle Zwecke angestrebt werden, auch bei Sternkarten die *Kegelprojektionen* vorzuziehen sind.

2. Für die Darstellung von **Weltkarten, Planiglobien** ist die Centralprojektion nicht verwendbar, wenn man eine Halbkugel völlig zur Abbildung bringen will; die orthographische Projektion hat den Nachtheil, dass die Bilder an den Rändern zu sehr verzerrt werden; recht gute Darstellungen erhält man durch die *externe perspektivische Projektion* nach *Lahire* (oder gemäss Tafel 4 durch diejenige externe Projektion, für welche $x = 1{\cdot}8$ ist). Doch haben die externen Projektionen den Nachtheil, dass die Netzlinien, obzwar gerade nicht besonders schwer, doch auch nicht gerade einfach zu ziehen sind, da man immer leichter Kreise als Ellipsen zeichnet, namentlich wenn die Mittelpunkte und Axen derselben erst gerechnet oder durch nicht besonders einfache Constructionen gefunden werden müssen; allerdings könnte man auch, namentlich bei Polarprojektionen die *äquidistante Polarprojektion* (sonst zenital) verwenden, von welcher sie sich nur wenig unterscheidet; für Zenitalprojektionen ist damit aber nichts Wesentliches gewonnen. Für Planiglobien wird man sich auch recht gut der *conformen polyconischen* (*Lagrange*'schen) Projektionen bedienen können; will man z. B. die ganze Erdkugel in einem Kreise darstellen, so kann man die durch Fig. 63 repräsentierte Form wählen, welche allerdings den grossen Nachtheil hat, dass gegen die Pole zu ausserordentlich grosse Längen- und Flächenänderungen stattfinden. Praktischer wird es natürlich die beiden Hemisphären getrennt zur Darstellung zu bringen, in welchem Falle eine conforme, gleichzeitig auch perspektivische Projektion zu empfehlen ist, nämlich die *stereographische*. Dieselbe ist perspektivisch, man kann daher leicht verschiedene, mehr oder weniger wichtige Aufgaben graphisch lösen; sie ist conform, d. h. alle Winkel erscheinen in wahrer Grösse; es findet also wenigstens in dieser Beziehung eine Verzerrung nicht statt. Endlich hat sie den Vortheil, dass die Netzlinien sämmtlich Kreise sind; für Planiglobien wo der Massstab immer ein verhältnissmässig kleiner ist, wird man die Netzlinien daher auch leicht mit Hilfe des Cirkels zeichnen können, und, wenn dies überhaupt nötig werden sollte, so doch jedenfalls nur für sehr wenige, die gleich zu erörternde Construktion mittels der Coordinaten einzelner Punkte einschlagen müssen. Dem gegenüber hat sie allerdings den Fehler, dass gegen den Rand zu

(u. zw. schon bei der Darstellung von Halbkugeln) eine sehr beträchtliche Linear- und Flächenänderung stattfindet. In 90⁰ Entfernung vom Kartenmittelpunkte sind die Längen bereits verdoppelt, die Flächen auf das vierfache vergrössert. Handelt es sich aber gerade um die Erhaltung der Flächen, so wird man für äquatoreale Projektionen entweder die *Sanson*'sche oder die *Mollweide*'sche (homalographische) oder *Colignon*'sche Projektion verwenden, bei welchen die Netzlinien leicht zu verzeichnen sind; bei der ersteren nämlich sind die Parallelkreise äquidistante Gerade, die Meridiane können leicht auf empirische Weise gefunden werden; bei der zweiten sind die Parallelkreise Gerade, deren Abstände vom Äquator leicht gefunden werden können, die Meridiane Ellipsen, deren Axen ebenfalls leicht zu erhalten sind; bei der dritten sind beide Gruppen von Netzlinien geradlinig. Doch finden bei den beiden letzten schon in der Mitte der Karte ziemlich bedeutende Längenänderungen statt, indem der Meridiangrad nicht gleich dem Äquatorgrad ist, wozu überdies bei der dritten der Nachtheil tritt, dass schon am Äquator beträchtliche Winkeländerungen auftreten. Von beiden Nachtheilen ist die erste frei, welche sich daher am meisten empfiehlt.

Eine gute äquivalente Polarprojektion ist die von *Lambert* gegebene, welche vor der *Werner*'schen den bedeutenden Vorzug hat, dass die Meridiane gerade Linien sind, und dass bei ihr der Pol Kartenmittelpunkt im eigentlichen Sinne des Wortes ist, während bei der letzteren in dem Pole selbst eine Lücke entsteht, indem die im Meridian von 180⁰ Länge aneinander grenzenden Länder der Erdoberfläche in der Karte getrennt erscheinen.

Zur Darstellung von Planiglobien, bei denen weder der Pol noch auch ein Punkt des Äquators Mittelpunkt werden soll, kann man sich je nach Umständen der *stereographischen* oder der *äquidistanten* Zenitalprojektion, oder der *Lahire*'schen externen (ebenfalls als Zenitalprojektion) bedienen, wobei, wie schon erwähnt, die beiden letzteren sich bei dem verhältnissmässig kleinen Massstabe, welcher für Planiglobien gewählt wird, nicht bedeutend unterscheiden. Soll das Bild äquivalent sein, so stellt man es in der *Lambert*'schen *äquivalenten Zenitalprojektion* dar. Im gewissen Sinne werden die Kartenfehler zu einem Minimum gemacht in der *Projektion by balance of errors*, welche daher auch ziemlich häufig für Planiglobien verwendet wird. (Für kleinere Theile der Erdoberfläche verdient das *Tissot*'sche Princip den Vorzug, während das letztere für die ganze Erdkugel nicht anwendbar ist, weil der Voraussetzung nach die Längen- und Breitendifferenzen der zur Darstellung gelangenden Punkte gewisse Grenzen nicht überschreiten dürfen.)

Die Construktion des Netzes bleibt hier für alle Fälle dieselbe; eine direkte Construktion der Netzlinien ist, ausser für die externen

Projektionen nicht möglich, und auch für die letztern kann man statt der im ersten Kapitel gegebenen Construktion den allgemeinen Weg einschlagen, nach welchem man sich für alle Schnittpunkte der zu verzeichnenden Meridiane und Parallelkreise die Bilder sucht. Ist die geographische Länge eines Punktes λ, β (z. B. für den Schnittpunkt des Meridians, dessen Längendifferenz gegen den Meridian des Kartenmittelpunktes 20^0, und für den Parallelkreis, dessen Breite 30^0 : $\lambda = 20^0$, $\beta = 30^0$), so wird man nach den Formeln (pag. 81) hieraus in Verbindung mit der geographischen Breite des Kartenmittelpunktes die Grössen u, v (Azimut des betreffenden Punktes und seine sphärische Entfernung vom Mittelpunkt des darzustellenden Flächentheiles) berechhen: mit Hilfe der Grösse v lässt sich nunmehr nach dem für die anzuwendende Zenitalprojektion definierten Gesetz die Entfernung ϱ des Punktes der Karte vom Kartenmittelpunkte ermitteln; also z. B. für die *Lambert*'sche äquivalente Zenitalprojektion $\varrho = 2A \sin \frac{p}{2}$, oder für die äquidistante Zenitalprojektion $\varrho = Ap$, für die Projektion by balance of errors

$$\varrho = 2A \cot \frac{p}{2} \log_n \sec \frac{p}{2} + 2A \cot \frac{p_0^2}{2} \log_n \sec \frac{p_0}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p}{2} \cdot$$

Trägt man diesen Abstand ϱ im Azimute u in der Karte auf, so erhält man das Bild des Punktes (λ, β). Die Verbindung der zu derselben Länge gehörigen Punkte giebt die Meridiane; durch Verbindung der zur selben Breite gehörigen Punkte erhält man die Parallelkreise. Für die Leichtigkeit der Einzeichnung ist es nun ziemlich gleichgiltig, für welche dieser Projektionen man sich entscheidet; die Berechnung von u, v kann man nirgends umgehen, und der Unterschied bei den verschiedenen Projektionen liegt nur in der Berechnung von ϱ. Hiernach wäre nun allerdings die äquidistante zenitale Projektion (nach *Mercator*, fälschlich auch *Postel*'sche genannt) die einfachste, allerdings nicht die beste, weil ja in der Nähe des Kartenrandes die Verhältnisse gegenüber den auf der Erdoberfläche stattfindenden zu sehr verändert werden. Im allgemeinen wird die *Projektion bei balance of errors*, oder wenn Äquivalenz oder Conformität gefordert werden, beziehungsweise die *Lambert'sche äquivalente Zenitalabbildung*, oder die *conforme polyconische* (speziell die *stereographische*) angewendet.

Von anderen Projektionen wäre noch zu erwähnen die *äquivalente gerade und transverse Cylinderprojektion* von *Lambert*, welche aber wegen der bedeutenden Verzerrung an den Polen, welche nicht als Punkte erscheinen, für diese Zwecke nicht gut zu verwenden sind; ferner die zur Herstellung von Weltkarten mitunter verwendete *Sternprojektion*, welche eigentlich für eine Halbkugel nur eine äquidistante Polarprojektion ist; wegen der Zerreissung der anderen

Hemisphäre jedoch scheint dieselbe nicht gerade geeignet, eine besonders gute Übersicht zu gestatten. In vielen Fällen werden Weltkarten auch in der *Mercator*'schen Seekartenprojektion angefertigt, namentlich, wenn es sich um eine zusammenhängende Darstellung der ganzen Erdoberfläche handelt, wo auf die Verhältnisse in den Polen (welche nicht auf die Karte fallen) nicht Rücksicht genommen zu werden braucht.

Als conforme Darstellung der ganzen Erdoberfläche (wobei allerdings in 4 Punkten des Äquators, die um je 90⁰ von einander abstehen, keine Ähnlichkeit in den kleinsten Theilen stattfindet) ist besonders empfehlenswert die *Peirce*'sche *Quincunctialprojektion*; die eine Hemisphäre ist allerdings wie bei den Sternprojektionen zerschnitten, kann aber (wegen der Periodicität) sehr leicht conform fortgesetzt werden.

3. Für **Seekarten** ist die *Mercator*'sche Cylinderprojektion ausschliesslich eingeführt, und wird wol auch einzig und allein angewendet werden, so lange die Schifffahrt nach der *Loxodrome* erfolgt. Bei dieser Projektion tritt nun allerdings in, vom Äquator weiter entfernten Gegenden eine sehr bedeutende Vergrösserung auf; sie hat ferner den Nachtheil, dass man den Pol nicht auf der Karte erhalten kann; allein für die Schifffahrt haben diese beiden Punkte nur geringe Bedeutung, denn erstens handelt es sich hier zunächst um die Bestimmung der Cursrichtung, und zweitens ist zu erwähnen, dass es bei allen conformen Projektionen Punkte giebt, in denen die Ähnlichkeit in den kleinsten Theilen nicht stattfindet, und überdies ist man bisher noch nicht in der Lage, zu so polnahen Punkten zu gelangen, dass man auf die *Mercator*'schen Karten verzichten müsste. Für die Schifffahrt im grössten Kreise könnte aber statt dieser Projektion die *stereographische* oder *Centralprojektion* Verwendung finden, weil die Construktion des Schiffscurses und der Entfernung in beiden, und vorzugsweise in der letzteren ohne Schwierigkeit durchgeführt werden kann.

4. Für die Darstellung von grösseren oder kleineren **Theilen der Erdoberfläche** werden sich die *perspektivischen Projektionen* nicht empfehlen. Schon die *Kegelprojektionen* werden hier stets eine genauere Darstellung gewähren, da sie den Vortheil haben, dass sich die Karte beliebig weit nach Ost und West fortsetzen lässt; da die Verhältnisse längs eines Parallelkreises dieselben bleiben, also zunächst das Vergrösserungsverhältnis nicht nur längs eines Punktes, sondern längs einer Linie gleich 1 ist. Ein weiterer Vorzug besteht darin, dass die Netzlinien unter allen Umständen einfacher als bei den perspektivischen Projektionen zu zeichnen sind; die Meridiane sind nämlich für alle Fälle geradlinig, während die Parallelkreise sich als concentrische Kreise darstellen. Wenn aber der Massstab

der Karte ein etwas grösserer wird, so werden allerdings nur die Meridiane leicht zu zeichnen sein, denn die Parallelkreise haben dann so grosse Halbmesser, dass man den Cirkel nicht mehr benützen kann, und man muss dann einzelne Punkte derselben durch ihre Coordinaten bestimmen. Für diesen Fall sei a die Entfernung des gemeinschaftlichen Mittelpunktes O (Fig. 66) aller Parallelkreise vom Kartenmittelpunkte M, und ϱ der Halbmesser irgend eines Paralleles; dann ist die Gleichung des letzteren, bezogen auf ein durch den Mittelpunkt O gehendes rechtwinkliges Axensystem, dessen Y-axe mit dem ersten Meridian zusammenfällt

$$x^2 + y^2 = \varrho^2.$$

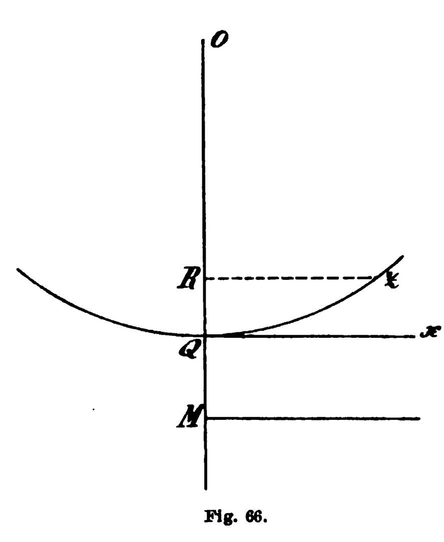


Fig. 66.

Nun werden sich aber diese Coordinaten auch nicht eintragen lassen, weil man jenes Axensystem nicht verzeichnen kann; man kann nun entweder auf ein Axensystem übergehen, welches durch den Kartenmittelpunkt parallel zum früheren geht, für welches dann die Gleichung

$$x^2 + (a - y)^2 = \varrho^2$$

oder $y = a - \sqrt{\varrho^2 - x^2}$

ist; oder aber man errichtet in demjenigen Punkte Q, in welchem der erste Meridian von dem zu zeichnenden Parallelkreis geschnitten wird, ein Perpendikel auf den ersten Meridian und nimmt Q als Mittelpunkt eines neuen Axensystems an, dessen X-axe mit dem eben gezogenen Perpendikel, also mit der Tangente in Q zusammenfällt. Auf dieses Axensystem bezogen wird die Gleichung

$$x = \sqrt{2\varrho y - y^2}.$$

Sucht man daher zu einer Reihe von Werten von y die zugehörigen x und trägt die y von Q aus, welcher Punkt nach dem jedesmaligen Gesetze der Projektion gefunden wird, gegen das gemeinschaftliche Centrum O hin (also nach R) auf, und auf der in dem erhaltenen Punkte R errichteten Senkrechten Rz die Werte von x, so erhält man einzelne Punkte, deren Verbindung den zu zeichnenden Kreis ergiebt.

Man ersieht aber hieraus, dass, wenn es sich um eine Darstellung handelt, in welcher nach dem anzunehmenden Massstab der Karte die Kreise nicht mehr mit dem Cirkel gezogen werden können, sondern durch die Coordinaten ihrer Punkte eingetragen werden müssen, ein wesentlicher Vortheil gegenüber anderen Projektionen,

wo die Netzlinien, wenn sie keine Kreise sind, auch durch die Coordinaten ihrer Punkte bestimmt werden müssen, nicht erwächst.

Handelt es sich also um die Darstellung ganzer Erdtheile, oder ausgedehnter Theile derselben, so sind in erster Linie die Kegelprojektionen in Betracht zu ziehen. Doch haben die früher sehr stark verwendete *einfache Ptolemäische Kegelprojektion* und die *Mercator*'sche (fälschlich *De l'Isle*'sche genannte) Kegelprojektion bei grösserer Ausdehnung der darzustellenden Länder bereits stärkere Verzerrungen im Gefolge, so dass dieselben nur für kleinere Partien, wie etwa Europa, mit Vortheil anzuwenden sind. Für grössere Theile benützt man lieber andere Projektionsmethoden. Asien findet man gewöhnlich in der *Mercator*'schen *äquivalenten* (fälschlich *Bonne*'schen genannten) Projektion dargestellt, welche bis auf die in höheren Breiten gelegenen Theile ein ziemlich günstiges Bild giebt und ausserdem den Vorzug der Äquivalenz besitzt. Für kleinere Theile, wie Europa, könnte man diese Projektion natürlich ebenso und vielleicht mit noch mehr Vortheil verwenden (wenn sich die darzustellenden Gegenden nicht zu nahe an den Pol erstrecken); doch zeigt eine Vergleichung mit der stereographischen Projektion dass die Unterschiede zweier Karten, welche nach den beiden Projektionen construiert werden, für nicht allzu ausgedehnte Gebiete sehr mässig bleiben. Bedenkt man nun aber, dass der Vortheil, welcher daraus entsteht, dass die Netzlinien bei der stereographischen Projektion Kreise sind, bei diesen Karten, welche im allgemeinen schon in grösserem Massstabe gezeichnet werden, nicht mehr so schwer ins Gewicht fällt, so wird man daraus entnehmen können, dass bei Karten, welche sich über Gebiete erstrecken, wie z. B. Europa, Russland, Vereinigte Staaten von Nordamerika etc., wol gleich gut die eine wie die andere Projektion verwendet werden kann. Statt derselben schlägt *Coatpont* die *äquivalente zenitale Lambert*'sche Projektion vor, welche die Vortheile hat, dass selbst in von der Kartenmitte weiter entfernten Punkten die Deformationen kleiner bleiben, und zwar selbst für polnahe Gegenden.

Äquatorealgegenden wird man ebensowol in der *Sanson*'schen als in der *Mollweide*'schen Projektion darstellen können, und in ähnlicher Weise könnte man für Länder, die sich in der Richtung eines Meridians weit erstrecken, wie z. B. Amerika eine ähnliche *Transversalprojektion* benützen, bei welcher der Meridian der Kartenmitte die Stelle des Äquators vertritt, während das Gesetz für die Kartendarstellung sonst ungeändert bleibt, so dass man also eine *transverse Sanson*'sche oder *Mollweide*'sche Projektion erhält. Soll die Darstellung eine conforme sein, so wird sich für die Äquatorgegenden die *Mercator*'sche conforme Cylinderprojektion, und wenn das Gebiet eine grössere Längenausdehnung in der Richtung des Meridians hat,

die *conforme transverse Cylinderprojektion* von *Lambert* empfehlen. Für in mittleren Breiten gelegene Länder wird man sich (wenn man eine conforme Darstellung vorzieht) der *conformen Lambert*'schen Kegelprojektion bedienen, welche die bereits erwähnten Vortheile einer Kegelprojektion mit denjenigen einer conformen Projektion vereinigt.

5. Für die Darstellung von **kleinen Theilen der Erdoberfläche** (einzelner Staaten, z. B. Österreich, England, Frankreich, Spanien etc. oder auch noch kleinerer Theile: einzelner Provinzen) waren bisher mehrfache Projektionsmethoden mit recht gutem Erfolge in der Praxis verwendet. Wenn man auch von den als unzweckmässig erkannten Plattkarten (und als solche ist ja auch die mehrfach verwendete *Cassini*sche Projektion anzusehen) absieht, so hat man in erster Linie die *Mercator*'sche *äquivalente Projektion* zu erwähnen (statt deren *Möllinger* die stereographische vorschlägt) und die *äquivalente Zenitalprojektion* von *Lambert*; ferner von nicht äquivalenten Abbildungen: die Kegelprojektion nach *Mercator*, die conforme Kegelprojektion nach *Lambert*, und die *äquidistante* und *rectanguläre polyconische* Projektion. Allen diesen Projektionen gegenüber verdient jedoch die *compensative Projektion* von *Tissot* entschieden den Vorzug. Man muss allerdings für dieselbe die Coordinaten der einzelnen Punkte rechnen, wofür man selbstverständlich die Schnittpunkte der zu verzeichnenden Meridiane und Parallelkreise wählen wird, allein, wie schon wiederholt erwähnt, muss dasselbe bei anderen Projektionen auch geschehen, selbst dann, wenn die Netzlinien Kreise sind, weil bei diesen Specialkarten, wo der Massstab schon verhältnismässig gross ist, der Kreis nicht mehr mit dem Cirkel gezogen werden kann. Wollte man ungeachtet dessen es doch als einen Vortheil einer Projektion betrachten, wenn die Netzlinien Kreise und Gerade sind, so ist zu erwähnen, dass wenigstens einer der *Tissot*'schen Projektionen diese Eigenschaft zukömmt, nämlich der *Tissot*'schen *Kegelprojektion*, welche allerdings weder äquivalent noch conform ist, der aber, wie die theoretischen Untersuchungen zeigen, die Eigenschaft des Minimums der Deformation zukömmt, sowol was Winkel- als auch was Längenänderungen anbelangt.

6. Bei Karten in noch grösserem Massstabe, wie bei **Generalstabskarten**, bei denen man sich gestatten kann, den auf einem Blatte dargestellten Flächentheil als eben zu betrachten, ist es selbstverständlich, dass alle durch die Krümmung oder gar Ellipticität der Erde bedingten Vorsichtsmassregeln überflüssig werden, und man kann die grössten Kreise durch gerade Linien darstellen. Dieses ist der Fall bei der *preussischen Polyëderprojektion* und den *österreichischen Gradkartenblättern*.

Hat man sich auf irgend eine Weise das Gradnetz für die Karte

hergestellt, so wird es nun leicht die durch ihre geographischen Positionen (geographische Länge und Breite) gegebenen Punkte in dasselbe einzutragen. Dabei wird man, wenn z. B. die Netzlinien von Grad zu Grad gezogen sind, leicht etwa die Minute durch eine *gleichmässige* Eintheilung des Netzviereckes berücksichtigen können, was einer linearen Interpolation (mit Rücksicht auf erste Differenzen) gleich kommt. Sollte man jedoch gezwungen sein auf die Veränderlichkeit des Massstabes innerhalb jedes Netzviereckes Rücksicht zu nehmen, und etwa die Punkte durch ihre Coordinaten einzutragen, so würde dadurch der Zweck des Zeichnens der Netzlinien illusorisch; es wird daher immer gut, die Maschen des Netzes genügend enge zu machen. (Bei den meisten Karten sieht man auch die zwischen die ausgezogenen Netzlinien fallenden, der Übersichtlichkeit wegen nicht verzeichneten durch die Unterabtheilungen an den Kartenrändern markiert). Hiefür lassen sich natürlich keine Regeln aufstellen, doch wird man sich hierbei mit Rücksicht auf den Massstab der Karte und auf die angestrebte Genauigkeit leicht entscheiden können. Wird die äusserste Genauigkeit gefordert, so werden vorschriftsmässig die Punkte durch ihre Coordinaten eingetragen und die Netzlinien nur zur Orientierung verzeichnet.

TAFELN.

Tafel 1 (pag. 27).

$$\varrho_1 = k_1 = K = \cos v;\ \sin\frac{\delta}{2} = \operatorname{tg}\frac{v^2}{2}$$

v	$\varrho = k_1 = K$	$\frac{\delta}{2}$
0°	1·00000	0° 0′ 0″
10	0·98481	0 26 19
20	0·93969	1 46 54
30	0·86603	4 7 2
40	0·76604	7 36 45
50	0·64279	12 33 32
60	0·50000	19 28 16
70	0·34202	29 21 35
80	0·17365	44 45 21
90	0·00000	90 0 0
	$k_2 = 1$	

Tafel 2 (pag. 58, 88).

$$\varrho = \operatorname{tg} v;\ k_1 = \sec v^2;\ k_2 = \sec v;\ K = \sec v^3;\ \sin\frac{\delta}{2} = \operatorname{tg}\frac{v^2}{2}$$

v	ϱ	k_1	k_2	K	$\frac{\delta}{2}$
0°	0·00000	1·00000	1·00000	1·00000	0° 0′ 0″
10	0·17633	1·03109	1·01543	1·04700	0 26 19
20	0·36397	1·13247	1·06418	1·20515	1 46 54
30	0·57735	1·33333	1·15470	1·53960	4 7 2
40	0·83910	1·70409	1·30541	2·22453	7 36 45
50	1·19175	2·42028	1·55572	3·76528	12 33 32
60	1·73205	4·00000	2·00000	8·00000	19 28 16
70	2·74748	8·54863	2·92380	24·99453	29 21 35
80	5·67128	33·16344	5·75877	190·98066	44 45 21
90	∞	∞	∞	∞	90 0 0

Tafel 3 (pag. 32, 44, 252).

$$\varrho = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v;\ k = \sec\tfrac{1}{2}v^2;\ K = \sec\tfrac{1}{2}v^4$$

$$\varrho = \operatorname{tg}\frac{v}{2}\left(\frac{1+\varepsilon\cos v}{1-\varepsilon\cos v}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}};\quad k' = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos v^2}}{\cos\frac{v^2}{2}}\left(\frac{1+\varepsilon\cos v}{1-\varepsilon\cos v}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}};\quad K' = k'^2$$

v	ϱ	k	K	ϱ'	k'	K'
0°	0·00000	1·00000	1·00000	0·00000	1·00333	1·00667
10	0·08749	1·00765	1·01537	0·08806	1·01098	1·02208
20	0·17633	1·03109	1·06315	0·17743	1·03450	1·07020
30	0·26795	1·07180	1·14875	0·26950	1·07530	1·15624
40	0·36397	1·13247	1·28250	0·36583	1·13604	1·29060
50	0·46631	1·21744	1·48217	0·46831	1·22098	1·49080
60	0·57735	1·33333	1·77778	0·57928	1·33666	1·78668
70	0·70021	1·49029	2·22097	0·70181	1·49312	2·22940
80	0·83910	1·70409	2·90392	0·84007	1·70590	2·91008
90	1·00000	2·00000	4·00000	1·00000	2·00000	4·00000
100	1·19175	2·42028	5·85774	1·19037	2·41722	5·84300
110	1·42815	3·03961	9·23921	1·42489	3·03150	9·18996
120	1·73205	4·00000	16·00000	1·72629	3·98326	15·86716
130	2·14451	5·59891	31·34778	2·13534	5·56728	30·99456
140	2·74748	8·54863	73·07910	2·73349	8·48844	72·05360
150	3·73205	14·92821	222·85133	3·71060	14·80520	219·19404
160	5·67128	33·16344	1099·8139	5·63592	32·85944	1079·73800
170	11·43005	131·64609	17330·696			
180	∞	∞	∞			

Tafel 4a (pag. 71).

$$\varrho = \frac{(1 + x)\sin v}{x + \cos v}$$

x	$v = 0^0$	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80^0	90^0	100^0	110^0	120^0	130^0
1·0	0·0000	0·1750	0·3527	0·5359	0·7279	0·9326	1·1547	1·4004	1·6782	2·0000	2·3835	2·8563	3·4641	4·2890
1·1	0·0000	0·1749	0·3521	0·5340	0·7234	0·9231	1·1367	1·3685	1·6238	1·9091	2·2325	2·6034	3·0311	3·5185
1·2	0·0000	0·1749	0·3516	0·5324	0·7192	0·9145	1·1208	1·3407	1·5772	1·8333	2·1109	2·4095	2·7218	3·0245
1·3	0·0000	0·1748	0·3512	0·5309	0·7156	0·9069	1·1066	1·3162	1·5370	1·7692	2·0110	2·2561	2·4898	2·6809
1·4	0·0000	0·1748	0·3508	0·5296	0·7122	0·9000	1·0939	1·2946	1·5019	1·7143	1·9273	2·1317	2·3094	2·4280
1·5	0·0000	0·1747	0·3505	0·5283	0·7092	0·8937	1·0825	1·2754	1·4710	1·6667	1·8562	2·0287	2·1651	2·2341
1·6	0·0000	0·1747	0·3501	0·5272	0·7064	0·8880	1·0722	1·2581	1·4436	1·6250	1·7951	1·9422	2·0470	—
1·7	0·0000	0·1746	0·3498	0·5261	0·7038	0·8828	1·0628	1·2425	1·4191	1·5882	1·7420	1·8683	1·9486	—
1·8	0·0000	0·1746	0·3495	0·5251	0·7014	0·8781	1·0543	1.2283	1·3971	1·5556	1·6955	1.8046	1·8653	—
1·9	0·0000	0·1746	0·3493	0·5242	0·6992	0·8737	1·0464	1·2155	1·3773	1·5263	1·6543	1·7491	1·7939	—
2·0	0·0000	0·1745	0·3490	0·5234	0·6971	0·8696	1·0392	1·2037	1·3592	1·5000	1·6177	1·7003	1·7321	—
2·1	0·0000	0·1745	0·3488	0·5226	0·6952	0·8658	1·0326	1·1929	1·3427	1·4762	1·5848	1·6570	—	—
2·2	0·0000	0·1745	0·3486	0·5218	0·6935	0·8623	1·0264	1·1829	1·3276	1·4545	1·5552	1·6184	—	—
2·3	0·0000	0·1745	0·3484	0·5212	0·6918	0·8590	1·0207	1·1737	1·3138	1·4348	1·5284	1·5838	—	—
2·4	0·0000	0·1744	0·3482	0·5205	0·6902	0·8560	1·0153	1·1652	1·3010	1·4167	1·5040	1·5525	—	—
2·5	0·0000	0·1744	0·3480	0·5199	0·6888	0·8531	1·0104	1·1572	1·2891	1·4000	1·4816	1·5241	—	—
2·6	0·0000	0·1744	0·3478	0·5193	0·6875	0·8504	1·0057	1·1499	1·2779	1·3846	1·4612	1·4982	—	—

Tafel 4b (pag. 71).

$$k_1 = (1 + x)\frac{1 + x\cos v}{(x + \cos v)^2}$$

x	v = 0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°
1·0	1·0000	1·0077	1·0311	1·0718	1·1325	1·2174	1·3333	1·4903	1·7041	2·0000	2·4203	3·0396	4·0000	5·5989
1·1	1·0000	1·0065	1·0265	1·0608	1·1113	1·1803	1·2715	1·3898	1·5418	1·7355	1·9798	2·2800	2·6250	2·9427
1·2	1·0000	1·0055	1·0224	1·0510	1·0924	1·1475	1·2180	1·3049	1·4089	1·5278	1·6533	1·7620	1·7959	1·6202
1·3	1·0000	1·0046	1·0186	1·0421	1·0754	1·1185	1·1713	1·2323	1·2982	1·3609	1·4037	1·3919	1·2578	0·8753
1·4	1·0000	1·0038	1·0152	1·0341	1·0601	1·0927	1·1302	1·1696	1·2049	1·2245	1·2078	1·1175	0·8889	0·4190
1·5	1·0000	1·0031	1·0121	1·0267	1·0463	1·0695	1·0938	1·1148	1·1250	1·1111	1·0509	0·9079	0·6250	0·0218
1·6	1·0000	1·0024	1·0092	1·0199	1·0337	1·0485	1·0613	1·0667	1·0561	1·0156	0·9229	0·7439	0·4297	—
1·7	1·0000	1·0017	1·0064	1·0138	1·0222	1·0295	1·0321	1·0240	0·9962	0·9343	0·8168	0·6128	0·2812	—
1·8	1·0000	1·0010	1·0040	1·0081	1·0115	1·0121	1·0057	0·9859	0·9435	0·8651	0·7278	0·5062	0·1657	—
1·9	1·0000	1·0005	1·0018	1·0027	1·0019	0·9963	0·9817	0·9518	0·8970	0·8033	0·6520	0·4183	0·0740	—
2·0	1·0000	1·0000	0·9996	0·9978	0·9929	0·9817	0·9600	0·9211	0·8554	0·7500	0·5867	0·3449	0·0000	—
2·1	1·0000	0·9995	0·9976	0·9933	0·9845	0·9683	0·9400	0·8932	0·8184	0·7031	0·5308	0·2826	—	—
2·2	1·0000	0·9990	0·9958	0·9889	0·9768	0·9559	0·9218	0·8678	0·7849	0·6612	0·4816	0·2295	—	—
2·3	1·0000	0·9985	0·9940	0·9849	0·9695	0·9444	0·9050	0·8447	0·7548	0·6238	0·4384	0·1836	—	—
2·4	1·0000	0·9982	0·9923	0·9813	0·9628	0·9338	0·8894	0·8234	0·7272	0·5903	0·4001	0·1439	—	—
2·5	1·0000	0·9978	0·9907	0·9777	0·9565	0·9238	0·8750	0·8038	0·7022	0·5600	0·3659	0·1089	—	—
2·6	1·0000	0·9974	0·9893	0·9744	0·9501	0·9145	0·8616	0·7857	0·6792	0·5325	0·3355	0·0782	—	—

Tafel 4c (pag. 71).

$$k_3 = \frac{1 + x}{x + \cos v}$$

x	$v = 0^0$	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80^0	90^0	100^0	110^0	120^0	130^0
1'0	1'0000	1'0077	1'0311	1'0718	1'1325	1'2174	1'3333	1'4903	1'7041	2'0000	2'4203	3'0396	4'0000	5'5989
1'1	1'0000	1'0073	1'0296	1'0681	1'1254	1'2050	1'3125	1'4563	1'6488	1'9091	2'2670	2'7711	3'5000	4'5930
1'2	1'0000	1'0070	1'0282	1'0648	1'1190	1'1938	1'2941	1'4267	1'6016	1'8333	2'1435	2'5642	3'1429	3'9482
1'3	1'0000	1'0067	1'0269	1'0619	1'1133	1'1839	1'2778	1.4007	1'5607	1'7692	2'0420	2'4009	2'8750	3'4996
1'4	1'0000	1'0064	1'0258	1'0591	1'1080	1'1749	1'2632	1.3777	1'5251	1'7143	1'9570	2'2685	2'6667	3'1695
1'5	1'0000	1'0061	1'0247	1'0566	1'1033	1'1667	1'2500	1'3572	1'4937	1'6667	1'8849	2'1589	2'5000	2'9164
1'6	1'0000	1'0059	1'0237	1'0543	1'0989	1'1593	1'2381	1'3388	1'4659	1'6250	1'8228	2'0668	2'3636	—
1'7	1'0000	1'0057	1'0228	1'0522	1'0949	1'1525	1'2273	1'3222	1'4410	1'5882	1'7689	1'9882	2'2500	—
1'8	1'0000	1'0055	1'0220	1'0503	1'0912	1'1462	1'2174	1'3072	1'4187	1'5556	1'7216	1'9205	2'1538	—
1'9	1'0000	1'0053	1'0212	1'0484	1'0878	1'1405	1'2083	1'2935	1'3985	1'5263	1'6798	1'8614	2'0714	—
2'0	1'0000	1'0051	1'0205	1'0467	1'0846	1'1352	1'2000	1'2809	1'3802	1'5000	1'6426	1'8094	2'0000	—
2'1	1'0000	1'0049	1'0198	1'0452	1'0816	1'1302	1'1923	1'2694	1'3634	1'4762	1'6093	1'7634	—	—
2'2	1'0000	1'0048	1'0192	1'0437	1'0789	1'1257	1'1852	1'2588	1'3481	1'4545	1'5792	1'7223	—	—
2'3	1'0000	1'0046	1'0186	1'0423	1'0763	1'1214	1'1786	1'2490	1'3341	1'4348	1'5520	1'6854	—	—
2'4	1'0000	1'0045	1'0181	1'0410	1'0739	1'1174	1'1724	1'2400	1'3211	1'4166	1'5272	1'6521	—	—
2'5	1'0000	1'0044	1'0175	1'0398	1'0716	1'1137	1'1667	1'2315	1'3091	1'4000	1'5045	1'6219	—	—
2'6	1'0000	1'0042	1'0170	1'0387	1'0695	1'1102	1'1613	1'2237	1'2979	1'3846	1'4837	1'5943	—	—

Tafel 4d (pag. 71).

$K = k_1 k_2$

x	v = 0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°
1·0	1·0000	1·0154	1·0632	1·1487	1·2825	1·4822	1·7778	2·2210	2·9039	4·0000	5·8577	9·2392	16·0000	31·3478
1·1	1·0000	1·0138	1·0568	1·1330	1·2506	1·4222	1·6688	2·0239	2·5421	3·3132	4·4881	6·3168	9·1875	13·5159
1·2	1·0000	1·0125	1·0512	1·1192	1·2224	1·3699	1·5762	1·8617	2·2565	2·8010	3·5439	4·5181	5·6442	6·3969
1·3	1·0000	1·0113	1·0460	1·1066	1·1972	1·3242	1·4967	1·7261	2·0262	2·4077	2·8664	3·3418	3·6162	3·0632
1·4	1·0000	1·0102	1·0414	1·0952	1·1746	1·2838	1·4276	1·6114	1·8376	2·0991	2·3637	2·5350	2·3704	1·3280
1·5	1·0000	1·0092	1·0371	1·0848	1·1543	1·2478	1·3672	1·5130	1·6805	1·8519	1·9808	1·9601	1·5625	0·0636
1·6	1·0000	1·0083	1·0332	1·0753	1·1359	1·2155	1·3140	1·4281	1·5481	1·6503	1·6823	1·5375	1·0157	—
1·7	1·0000	1·0074	1·0294	1·0667	1·1192	1·1865	1·2667	1·3539	1·4356	1·4839	1·4449	1·2184	0·6327	—
1·8	1·0000	1·0064	1·0261	1·0588	1·1037	1·1601	1·2243	1·2887	1·3385	1·3447	1·2530	0·9721	0·3569	—
1·9	1·0000	1·0058	1·0231	1·0513	1·0898	1·1362	1·1862	1·2314	1·2545	1·2261	1·0953	0·7786	0·1533	—
2·0	1·0000	1·0051	1·0201	1·0444	1·0769	1·1144	1·1520	1·1799	1·1806	1·1250	0·9637	0·6241	0·0000	—
2·1	1·0000	1·0044	1·0174	1·0382	1·0649	1·0944	1·1208	1·1339	1·1158	1·0379	0·8542	0·4983	—	—
2·2	1·0000	1·0038	1·0149	1·0321	1·0539	1·0760	1·0925	1·0924	1·0582	0·9617	0·7605	0·3953	—	—
2·3	1·0000	1·0031	1·0125	1·0266	1·0435	1·0590	1·0666	1·0551	1·0070	0·8950	0·6804	0·3094	—	—
2·4	1·0000	1·0027	1·0102	1·0216	1·0340	1·0434	1·0427	1·0210	0·9607	0·8363	0·6110	0·2377	—	—
2·5	1·0000	1·0021	1·0081	1·0166	1·0250	1·0288	1·0208	0·9899	0·9192	0·7840	0·5505	0·1766	—	—
2·6	1·0000	1·0016	1·0061	1·0121	1·0162	1·0152	1·0006	0·9614	0·8816	0·7373	0·4978	0·1247	—	—

Tafel 4e (pag. 71).

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{x-1}{x+1}\,\mathrm{tg}\,\frac{v^2}{2}$$

x	v = 0	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°
1.0	0° 0′.0	0° 0′.0	0° 0′.0	0° 0′.0	0° 0′.0	0° 0′.0	0° 0′.0	0° 0′.0	0° 0′.0	0° 0′.0	0° 0′.0	0° 0′.0	0° 0′.0	0° 0′.0
1.1	0 0.0	0 1.2	0 5.1	0 11.7	0 21.7	0 35.6	0 54.6	1 20.3	1 55.3	2 43.8	3 52.7	5 34.4	8 12.8	12 39.0
1.2	0 0.0	0 2.4	0 9.7	0 22.4	0 41.4	1 8.0	1 44.2	2 33.3	3 40.2	5 12.9	7 25.1	10 41.1	15 49.6	24 42.8
1.3	0 0.0	0 3.4	0 13.9	0 32.2	0 59.4	1 37.5	2 29.5	3 40.0	5 16.2	7 29.7	10 40.5	15 25.7	23 2.1	36 51.6
1.4	0 0.0	0 4.4	0 17.8	0 41.1	1 15.9	2 4.6	3 11.1	4 41.2	6 44.4	9 35.6	13 41.5	19 52.4	30 0.0	50 2.3
1.5	0 0.0	0 5.2	0 21.4	0 49.4	1 31.1	2 29.5	3 49.3	5 37.6	8 5.7	11 32.2	16 30.1	24 4.5	36 52.2	66 53.6
1.6	0 0.0	0 6.1	0 24.7	0 57.0	1 45.1	2 52.6	4 24.7	6 29.8	9 21.1	13 20.5	19 7.9	28 4.7	43 48.7	—
1.7	0 0.0	0 6.8	0 27.7	1 4.0	1 58.1	3 13.9	4 57.5	7 18.2	10 31.1	15 1.6	21 36.3	31 55.4	51 3.4	—
1.8	0 0.0	0 7.5	0 30.5	1 10.5	2 10.1	3 33.7	5 27.9	8 3.1	11 36.3	16 36.1	23 56.4	35 38.6	58 59.8	—
1.9	0 0.0	0 8.2	0 33.2	1 16.6	2 21.4	3 52.2	5 56.3	8 45.1	12 37.3	18 4.8	26 9.2	39 16.2	68 35.8	—
2.0	0 0.0	0 8.8	0 35.6	1 22.3	2 31.8	4 9.4	6 22.8	9 24.4	13 34.4	19 28.3	28 15.4	42 50.0	90 0.0	—
2.1	0 0.0	0 9.3	0 37.9	1 27.6	2 41.6	4 25.5	6 47.6	10 1.1	14 28.1	20 47.0	30 15.8	46 21.8	—	—
2.2	0 0.0	0 9.9	0 40.1	1 32.6	2 50.8	4 40.6	7 10.8	10 35.7	15 18.6	22 1.5	32 10.9	49 53.6	—	—
2.3	0 0.0	0 10.4	0 42.1	1 37.2	2 59.5	4 54.8	7 32.7	11 8.2	16 6.2	23 12.0	34 1.3	53 27.8	—	—
2.4	0 0.0	0 10.8	0 44.0	1 41.6	3 7.6	5 8.2	7 53.3	11 38.8	16 51.2	24 18.9	35 47.4	57 7.4	—	—
2.5	0 0.0	0 11.3	0 45.8	1 45.8	3 15.3	5 20.8	8 12.8	12 7.8	17 33.8	25 22.6	37 29.7	60 56.4	—	—
2.6	0 0.0	0 11.7	0 47.5	1 49.7	3 22.5	5 32.7	8 31.2	12 35.2	18 14.1	26 23.3	39 8.5	65 1.5	—	—

Tafel 4f (pag. 71).

$$\cos v' = -\frac{1}{x}; \quad \varrho' = \operatorname{tg}\frac{v'}{2}; \quad k_2' = \tfrac{1}{2}\sec\frac{v'^2}{2}$$

x	v'	ϱ'	k_2'
1·0	180° 0′ 0″	∞	∞
1·1	155 22 48	4·5825	11·0000
1·2	146 26 33	3·3166	6·0000
1·3	140 17 5	2·7689	4·3333
1·4	135 35 5	2·4495	3·5000
1·5	131 48 37	2·2361	3·0000
1·6	128 40 56	2·0817	2·6667
1·7	126 1 55	1·9640	2·4286
1·8	123 44 56	1·8708	2·2500
1·9	121 45 25	1·7950	2·1111
2·0	120 0 0	1·7321	2·0000
2·1	118 26 13	1·6787	1·9091
2·2	117 2 8	1·6330	1·8333
2·3	115 46 17	1·5933	1·7692
2·4	114 37 28	1·5584	1·7143
2·5	113 34 42	1·5275	1·6667
2·6	112 37 12	1·5000	1·6250

Tafel 5 (pag. 82).

Werte von v ($\cos v = \cos \varphi \cos \lambda$)

$\varphi =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\lambda =$ 0°	0 0′ 0″	10° 0′ 0″	20° 0′ 0″	30° 0′ 0″	40° 0′ 0″	50° 0′ 0″	60° 0′ 0″	70° 0′ 0″	80° 0′ 0″	90° 0′ 0″
10	10 0 0	14 6 22	22 16 8	31 28 30	41 1 35	50 43 36	60 30 5	70 18 59	80 9 12	90 0 0
20	20 0 0	22 16 8	27 59 27	35 31 53	43 57 30	52 50 29	61 58 32	71 15 10	80 36 31	90 0 0
30	30 0 0	31 28 30	35 31 53	41 24 35	48 26 21	56 10 27	64 20 28	72 46 14	81 21 3	90 0 0
40	40 0 0	41 1 35	43 57 30	48 26 21	54 4 5	60 30 5	67 28 44	74 48 40	82 21 21	90 0 0
50	50 0 0	50 43 36	52 50 29	56 10 27	60 30 5	65 35 44	71 15 10	77 18 0	83 35 29	90 0 0
60	60 0 0	60 30 5	61 58 32	64 20 28	67 28 44	71 15 10	75 31 21	80 9 12	85 1 9	90 0 0
70	70 0 0	70 18 59	71 15 10	72 46 14	74 48 40	77 18 0	80 9 12	83 16 56	86 35 42	90 0 0
80	80 0 0	80 9 12	80 36 31	81 21 3	82 21 21	83 35 29	85 1 9	86 35 42	88 16 19	90 0 0
90	90 0 0	90 0 0	90 0 0	90 0 0	90 0 0	90 0 0	90 0 0	90 0 0	90 0 0	90 0 0

Werte von u ($\operatorname{tg} u = \sin \lambda \cot \varphi$)

$\varphi =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\lambda =$ 0°	unbestimmt	0° 0′ 0″	0° 0′ 0″	0° 0′ 0″	0° 0′ 0″	0° 0′ 0″	0° 0′ 0″	0° 0′ 0″	0° 0′ 0″	0° 0′ 0″
10	90° 0′ 0″	44 33 41	25 30 20	16 44 22	11 41 31	8 27 24	5 43 30	3 36 59	1 45 14	0 0 0
20	90 0 0	62 43 37	43 13 9	30 38 32	22 10 34	16 0 46	11 10 13	7 5 45	3 27 4	0 0 0
30	90 0 0	70 34 29	53 56 51	40 53 36	30 47 23	22 45 38	16 6 8	10 18 51	5 2 18	0 0 0
40	90 0 0	74 39 37	60 28 47	48 4 12	37 27 13	28 20 7	20 21 38	13 10 4	6 27 59	0 0 0
50	90 0 0	77 2 15	64 35 10	52 59 44	42 23 39	32 43 57	23 51 31	15 34 46	7 41 33	0 0 0
60	90 0 0	78 29 30	67 12 15	56 18 36	45 54 17	36 0 19	26 33 54	17 29 43	8 40 56	0 0 0
70	90 0 0	79 22 21	68 49 38	58 26 0	48 14 12	38 15 20	28 28 52	18 52 54	8 24 29	0 0 0
80	90 0 0	79 50 56	69 42 59	59 37 7	49 34 3	39 34 7	29 37 18	19 43 11	9 51 4	0 0 0
90	90 0 0	80 0 0	70 0 0	60 0 0	50 0 0	40 0 0	30 0 0	20 0 0	10 0 0	0 0 0

Tafel 6a (pag. 89, 98, 103, 106, 136).

β	arc (10° sin β)	β	arc (10° sin β)	β	arc (10° sin β)	β	arc (10° sin β)
0°	0·000000	20°	0·059694	41°	0·114504	61°	0·152650
1	0·003046	21	0·062547	42	0·116785	62	0·154103
2	0·006091	22	0·065381	43	0·119031	63	0·155510
3	0·009134	23	0·068195	44	0·121241	64	0·156869
4	0·012175	24	0·070989	45	0·123413	65	0·158180
5	0·015212	25	0·073761	46	0·125548	66	0·159443
6	0·018244	26	0·076510	47	0·127645	67	0·160658
7	0·021270	27	0·079236	48	0·129703	68	0·161824
8	0·024290	28	0·081938	49	0·131722	69	0·162940
9	0·027303	29	0·084615	50	0·133700	70	0·164007
10	0·030307	30	0·087266	51	0·135637	71	0·165024
11	0·033302	31	0·089891	52	0·137534	72	0·165990
12	0·036287	32	0·092488	53	0·139388	73	0·166906
13	0·039261	33	0·095057	54	0·141200	74	0·167772
14	0·042223	34	0·097597	55	0·142969	75	0·168586
15	0·045172	35	0·100108	56	0·144694	76	0·169348
16	0·048108	36	0·102588	57	0·146375	77	0·170060
17	0·051028	37	0·105036	58	0·148012	78	0·170719
18	0·053933	38	0·107453	59	0·149604	79	0·171327
19	0·056822	39	0·109837	60	0·151150	80	0·171881
20	0·059694	40	0·112187	61	0·152650	90	0·174533

Tafel 6b.

β	10° sin β		
0°	0°	0′	0″
10	1	44	11
20	3	25	13
30	5	0	0
40	6	25	40
50	7	39	37
60	8	39	37
70	9	23	49
80	9	50	53
90	10	0	0

Tafel 7 (pag. 96).

$$k_2 = \frac{p}{\sin p}; \quad \sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{p - \sin p}{p + \sin p}$$

p	k_2	$\frac{\vartheta}{2}$		
0°	1·00000	0°	0′	0″
10	1·00509	0	8	44
20	1·02060	0	35	3
30	1·04720	1	19	16
40	1·08610	2	21	56
50	1·13918	3	43	50
60	1·20920	5	26	1
70	1·30014	7	29	52
80	1·41780	9	57	2
90	1.57080	12	49	42

Tafel 8 (pag. 90, 99).

λ	arc λ
0°	0·00000
10	0·17453
20	0·34907
30	0·52360
40	0·69813
50	0·87266
60	1·04720
70	1·22173
80	1·39626
90	1·57080

Tafel 9 (pag. 102).

ε	$\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}$	$\frac{\varepsilon}{\operatorname{tg}\varepsilon}$
0°	1·00000	1·00000
1	0·99995	0·99990
2	0·99980	0·99959
3	0·99954	0·99909
4	0·99919	0·99837
5	0·99873	0·99746
6	0·99817	0·99634
7	0·99751	0·99502
8	0·99675	0·99349
9	0·99589	0·99176
10	0·99493	0·98982
11	0·99387	0·98768
12	0·99271	0·98534
13	0·99144	0·98278
14	0·99008	0·98002
15	0·98862	0·97705
16	0·98705	0·97387
17	0·98539	0·97048
18	0·98363	0·96688
19	0·98177	0·96307
20	0·97982	0·95905

Tafel 10 (pag. 111).

$$\varrho = \operatorname{tg} \frac{p^m}{2}$$

p	m = 0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9	1·0
1°	0·24113	0·15009	0·09342	0·05815	0·03619	0·02253	0·01402	0·00873
2	0·29688	0·19850	0·13212	0·08814	0·05880	0·03922	0·02617	0·01746
3	0·33529	0·23293	0·16182	0·11242	0·07810	0·05426	0·03769	0·02619
4	0·36553	0·26136	0·18687	0·13361	0·09553	0·06831	0·04884	0·03492
5	0·39087	0·28578	0·20895	0·15278	0·11170	0·08167	0·05972	0·04366
6	0·41288	0·30744	0·22893	0·17047	0·12693	0·09452	0·07038	0·05241
7	0·43246	0·32704	0·24731	0·18702	0·14143	0·10695	0·08088	0·06116
8	0·45019	0·34503	0·26444	0·20267	0·15533	0·11905	0·09124	0·06993
9	0·46644	0·36174	0·28054	0·21757	0·16873	0·13085	0·10148	0·07870
10	0·48149	0·37738	0·29578	0·23183	0·18170	0·14242	0·11162	0·08749
11	0·49553	0·39213	0·31030	0·24555	0·19431	0·15377	0·12168	0·09629
12	0·50873	0·40611	0·32420	0·25880	0·20660	0·16493	0·13166	0·10510
13	0·52119	0·41943	0·33754	0·27164	0·21861	0·17592	0·14158	0·11394
14	0·53302	0·43217	0·35041	0·28411	0·23036	0·18677	0·15143	0·12279
15	0·54429	0·44440	0·36284	0·29625	0·24188	0·19749	0·16124	0·13165
16	0·55506	0·45616	0·37489	0·30809	0·25320	0·20809	0·17101	0·14054
17	0·56539	0·46752	0·38659	0·31967	0·26433	0·21857	0·18074	0·14945
18	0·57532	0·47850	0·39798	0·33100	0·27530	0·22897	0·19043	0·15838
19	0·58490	0·48915	0·40908	0·34211	0·28610	0·23927	0·20010	0·16734
20	0·59415	0·49949	0·41991	0·35301	0·29677	0·24949	0·20974	0·17633
21	0·60310	0·50955	0·43051	0·36373	0·30731	0·25964	0·21937	0·18534
22	0·61178	0·51935	0·44089	0·37428	0·31773	0·26973	0·22897	0·19438
23	0·62021	0·52891	0·45106	0·38466	0·32804	0·27975	0·23857	0·20345
24	0·62841	0·53826	0·46104	0·39490	0·33824	0·28972	0·24816	0·21256
25	0·63640	0·54740	0·47084	0·40500	0·34836	0·29964	0·25774	0·22170
26	0·64418	0·55635	0·48049	0·41497	0·35839	0·30952	0·26732	0·23087
27	0·65179	0·56512	0·48998	0·42483	0·36834	0·31936	0·27690	0·24008
28	0·65922	0·57373	0·49933	0·43457	0·37822	0·32917	0·28648	0·24933
29	0·66650	0·58219	0·50855	0·44422	0·38803	0·33894	0·29607	0·25862
30	0·67362	0·59050	0·51764	0·45376	0·39777	0·34869	0·30567	0·26795
31	0·68061	0·59868	0·52662	0·46323	0·40747	0·35842	0·31527	0·27732
32	0·68746	0·60673	0·53549	0·47260	0·41711	0·36813	0·32490	0·28675
33	0·69419	0·61467	0·54425	0·48191	0·42670	0·37782	0·33454	0·29621
34	0·70081	0·62250	0·55293	0·49114	0·43625	0·38750	0·34420	0·30573
35	0·70732	0·63021	0·56151	0·50030	0·44576	0·39717	0·35388	0·31530
36	0·71373	0·63784	0·57002	0·50941	0·45524	0·40684	0·36358	0·32492
37	0·72004	0·64537	0·57844	0·51846	0·46469	0·41650	0·37331	0·33460
38	0·72626	0·65281	0·58679	0·52745	0·47411	0·42616	0·38307	0·34433
39	0.73239	0·66018	0·59508	0·53640	0·48351	0·43583	0·39286	0·35412
40	0·73845	0·66746	0·60330	0·54530	0·49289	0·44550	0·40268	0·36397
41	0·74443	0·67468	0·61146	0·55417	0·50214	0·45519	0·41254	0·37389
42	0·75033	0·68182	0·61957	0·56300	0·51159	0·46488	0·42243	0·38386
43	0·75617	0·68890	0·62762	0·57179	0·52093	0·47459	0·43237	0·39391
44	0·76194	0·69593	0·63563	0·58056	0·53026	0·48431	0·44235	0·40403
45	0·76766	0·70289	0·64359	0·58930	0·53958	0·49406	0·45238	0·41421
46	0·77331	0·70981	0·65152	0·59801	0·54890	0·50383	0·46245	0·42448
47	0·77892	0·71667	0·65940	0·60671	0·55823	0·51362	0·47258	0·43481
48	0·78447	0·72349	0·66725	0·61539	0·56756	0·52344	0·48275	0·44523
49	0·78997	0·73027	0·67507	0·62405	0·57689	0·53329	0·49298	0·45573
50	0.79543	0·73700	0·68287	0·63271	0·58623	0·54317	0·50327	0·46631

Tafel 10 (pag. 111).

p	$m = 0·3$	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9	1·0
51°	0·80085	0·74370	0·69063	0·64135	0·59559	0·55309	0·51363	0·47698
52	0·80622	0·75036	0·69838	0·64999	0·60496	0·56305	0·52404	0·48773
53	0·81156	0·75700	0·70610	0·65863	0·61435	0·57305	0·53452	0·49858
54	0·81686	0·76360	0·71381	0·66727	0·62376	0·58309	0·54507	0·50953
55	0·82213	0·77018	0·72150	0·67591	0·63319	0·59317	0·55568	0·52057
56	0·82737	0·77673	0·72918	0·68455	0·64265	0·60331	0·56638	0·53171
57	0·83259	0·78326	0·73686	0·69320	0·65213	0·61350	0·57715	0·54296
58	0·83777	0·78977	0·74452	0·70186	0·66165	0·62374	0·58800	0·55431
59	0·84293	0·79626	0·75218	0·71053	0·67120	0·63404	0·59893	0·56577
60	0·84807	0·80274	0·75984	0·71922	0·68078	0·64439	0·60995	0·57735
61	0·85319	0·80921	0·76749	0·72793	0·69040	0·65481	0·62106	0·58905
62	0·85829	0·81566	0·77515	0·73665	0·70007	0·66530	0·63226	0·60086
63	0·86337	0·82211	0·78282	0·74540	0·70978	0·67586	0·64356	0·61280
64	0·86843	0·82854	0·79049	0·75418	0·71954	0·68649	0·65495	0·62487
65	0·87349	0·83498	0·79817	0·76298	0·72934	0·69719	0·66645	0·63707
66	0·87853	0·84141	0·80586	0·77181	0·73920	0·70797	0·67806	0·64941
67	0·88356	0·84784	0·81356	0·78067	0·74911	0·71883	0·68977	0·66189
68	0·88858	0·85427	0·82128	0·78957	0·75909	0·72978	0·70160	0·67451
69	0·89359	0·86070	0·82902	0·79851	0·76912	0·74081	0·71354	0·68728
70	0·89860	0·86714	0·83678	0·80749	0·77922	0·75194	0·72561	0·70021
71	0·90361	0·87359	0·84457	0·81651	0·78938	0·76316	0·73780	0·71329
72	0·90861	0·88004	0·85237	0·82558	0·79962	0·77448	0·75013	0·72654
73	0·91361	0·88651	0·86021	0·83469	0·80993	0·78590	0·76258	0·73996
74	0·91862	0·89299	0·86807	0·84386	0·82031	0·79743	0·77518	0·75355
75	0·92362	0·89948	0·87597	0·85308	0·83078	0·80907	0·78792	0·76733
76	0·92863	0·90599	0·88390	0·86235	0·84133	0·82082	0·80081	0·78129
77	0·93364	0·91252	0·89187	0·87169	0·85197	0·83269	0·81385	0·79544
78	0·93867	0·91907	0·89988	0·88109	0·86270	0·84469	0·82705	0·80978
79	0·94369	0·92564	0·90793	0·89056	0·87352	0·85681	0·84041	0·82434
80	0·94873	0·93223	0·91602	0·90009	0·88444	0·86906	0·85395	0·83910
81	0·95378	0·93884	0·92414	0·90968	0·89544	0·88143	0·86764	0·85408
82	0·95885	0·94551	0·93236	0·91939	0·90660	0·89399	0·88155	0·86929
83	0·96392	0·95219	0·94060	0·92915	0·91784	0·90666	0·89563	0·88473
84	0·96902	0·95890	0·94890	0·93899	0·92919	0·91950	0·90990	0·90040
85	0·97413	0·96565	0·95725	0·94892	0·94067	0·93248	0·92437	0·91633
86	0·97926	0·97244	0·96567	0·95894	0·95227	0·94564	0·93905	0·93252
87	0·98441	0·97926	0·97415	0·96906	0·96400	0·95896	0·95395	0·94897
88	0·98958	0·98613	0·98269	0·97927	0·97586	0·97246	0·96907	0·96569
89	0·99478	0·99304	0·99131	0·98958	0·98786	0·98613	0·98441	0·98270
90	1·00000	1·00000	1·00000	1·00000	1·00000	1·00000	1·00000	1·00000

Tafel 11 (pag. 120, 250).

$$y = \frac{\log_n \operatorname{tg}(45 + \frac{1}{2}\varphi)}{\operatorname{arc} 1'} : \xi = e^2 \sin\varphi + \frac{1}{3} e^4 \sin\varphi^3$$

φ	y	ξ	φ	y	ξ	φ	y	ξ	φ	y	ξ	φ	y	ξ
0° 0′	0·0′	0·0′	7° 0′	421·1′	2·8′	14° 0′	848·5′	5·6′	21° 0′	1289·2′	8·3′	28° 0′	1751·2′	10·8′
10	10·0		10	431·1		10	858·8		10	1299·9		10	1762·5	
20	20·0		20	441·2		20	869·1		20	1310·6		20	1773·9	
30	30·0		30	451·3		30	879·4		30	1321·4		30	1785·2	
40	40·0		40	461·4		40	889·8		40	1332·1		40	1796·6	
50	50·0		50	471·5		50	900·1		50	1342·9		50	1808·0	
1 0	60·0	0·4	8 0	481·6	3·2	15 0	910·5	6·0	22 0	1353·7	8·6	29 0	1819·4	11·1
10	70·0		10	491·7		10	920·8		10	1364·5		10	1830·9	
20	80·0		20	501·8		20	931·2		20	1375·3		20	1842·3	
30	90·0		30	511·9		30	941·5		30	1386·1		30	1853·8	
40	100·0		40	522·0		40	951·9		40	1396·9		40	1865·3	
50	110·0		50	532·1		50	962·3		50	1407·8		50	1876·8	
2 0	120·0	0·8	9 0	542·2	3·6	16 0	972·7	6·4	23 0	1418·6	9·0	30 0	1888·4	11·5
10	130·0		10	552·4		10	983·1		10	1429·5		10	1899·9	
20	140·0		20	562·5		20	993·5		20	1440·4		20	1911·5	
30	150·1		30	572·6		30	1004·1		30	1451·3		30	1923·1	
40	160·1		40	582·8		40	1014·4		40	1462·2		40	1934·7	
50	170·1		50	592·9		50	1024·9		50	1473·1		50	1946·4	
3 0	180·1	1·2	10 0	603·1	4·0	17 0	1035·3	6·8	24 0	1484·1	9·4	31 0	1958·0	11·9
10	190·1		10	613·2		10	1045·8		10	1495·0		10	1969·7	
20	200·1		20	623·4		20	1056·2		20	1506·0		20	1981·4	
30	210·1		30	633·6		30	1066·7		30	1517·0		30	1993·1	
40	220·2		40	643·7		40	1077·2		40	1528·0		40	2004·8	
50	230·2		50	653·9		50	1087·7		50	1539·0		50	2016·6	
4 0	240·2	1·6	11 0	664·1	4·4	18 0	1098·2	7·2	25 0	1550·0	9·7	32 0	2028·4	12·3
10	250·2		10	674·3		10	1108·7		10	1561·0		10	2040·2	
20	260·3		20	684·5		20	1119·3		20	1572·1		20	2052·0	
30	270·3		30	694·7		30	1129·8		30	1583·2		30	2063·9	
40	280·3		40	704·9		40	1140·4		40	1594·3		40	2075·7	
50	290·3		50	715·1		50	1150·9		50	1605·4		50	2087·6	
5 0	300·4	2·0	12 0	725·3	4·8	19 0	1161·5	7·6	26 0	1616·5	10·1	33 0	2099·5	12·6
10	310·4		10	735·5		10	1172·1		10	1627·6		10	2111·5	
20	320·5		20	745·8		20	1182·7		20	1638·8		20	2123·4	
30	330·5		30	756·0		30	1193·3		30	1649·9		30	2135·4	
40	340·6		40	766·3		40	1203·9		40	1661·1		40	2147·4	
50	350·6		50	776·5		50	1214·5		50	1672·3		50	2159·4	
6 0	360·7	2·4	13 0	786·8	5·2	20 0	1225·1	8·0	27 0	1683·5	10·4	34 0	2171·5	12·9
10	370·7		10	797·0		10	1235·8		10	1694·8		10	2183·6	
20	380·8		20	807·3		20	1246·4		20	1706·0		20	2195·7	
30	390·8		30	817·6		30	1257·1		30	1717·3		30	2207·8	
40	400·9		40	827·9		40	1267·8		40	1728·5		40	2219·9	
50	411·0		50	838·2		50	1278·5		50	1739·8		50	2232·1	
7 0	421·1	2·8	14 0	848·5	5·6	21 0	1289·2	8·3	28 0	1751·2	10·8	35 0	2244·3	13·3

Tafel 11 (pag. 120, 250).

φ	y	ξ	φ	y	ξ	φ	y	ξ	φ	y	ξ	φ	y	ξ
35° 0′	2244·3′	13·3′	42° 0′	2781·7′	15·4′	49° 0′	3381·8′	17·4′	56° 0′	4073·9′	19·1	63° 0′	4904·9′	20·5′
10	2256·5		10	2795·2		10	3397·1		10	4091·8		10	4927·0	
20	2268·8		20	2808·7		20	3412·5		20	4109·8		20	4949·2	
30	2281·0		30	2822·2		30	3428·0		30	4127·9		30	4971·6	
40	2293·3		40	2835·8		40	3443·4		40	4146·1		40	4994·1	
50	2305·6		50	2849·4		50	3458·9		50	4164·3		50	5016·7	
36 0	2318·0	13·6	43 0	2863·1	15·7	50 0	3474·5	17·7	57 0	4182·6	19·3	64 0	5039·4	20·7
10	2330·4		10	2876·8		10	3490·1		10	4201·0		10	5062·3	
20	2342·8		20	2890·5		20	3505·7		20	4219·5		20	5085·3	
30	2355·2		30	2904·3		30	3521·4		30	4238·1		30	5108·5	
40	2367·6		40	2918·1		40	3537·1		40	4256·8		40	5131·8	
50	2380·1		50	2931·9		50	3552·9		50	4275·5		50	5155·2	
37 0	2392·6	13·9	44 0	2945·8	16·0	51 0	3568·8	17·9	58 0	4294·3	19·5	65 0	5178·8	20·9
10	2405·2		10	2959·7		10	3584·7		10	4313·2		10	5202·5	
20	2417·7		20	2973·7		20	3600·7		20	4332·2		20	5226·4	
30	2430·3		30	2987·7		30	3616·7		30	4351·3		30	5250·5	
40	2442·9		40	3001·7		40	3632·8		40	4370·5		40	5274·7	
50	2455·6		50	3015·8		50	3649·0		50	4389·8		50	5299·0	
38 0	2468·3	14·3	45 0	3029·9	16·3	52 0	3665·2	18·1	59 0	4409·2	19·8	66 0	5323·5	21·1
10	2481·0		10	3044·1		10	3681·5		10	4428·7		10	5348·2	
20	2493·7		20	3058·3		20	3697·8		20	4448·2		20	5373·0	
30	2506·4		30	3072·5		30	3714·2		30	4467·8		30	5398·0	
40	2519·1		40	3086·8		40	3730·7		40	4487·6		40	5423·2	
50	2531·9		50	3101·2		50	3747·2		50	4507·4		50	5448·5	
39 0	2544·8	14·5	46 0	3115·6	16·6	53 0	3763·8	18·4	60 0	4527·3	20·0	67 0	5474·0	21·2
10	2557·8		10	3130·0		10	3780·4		10	4547·4		10	5499·7	
20	2570·7		20	3144·4		20	3797·1		20	4567·5		20	5525·6	
30	2583·7		30	3158·9		30	3813·9		30	4587·8		30	5551·6	
40	2596·7		40	3173·5		40	3830·8		40	4608·2		40	5577·8	
50	2609·7		50	3188·1		50	3847·7		50	4628·7		50	5604·2	
40 0	2622·7	14·8	47 0	3202·7	16·8	54 0	3864·6	18·6	61 0	4649·2	20·2	68 0	5630·8	21·4
10	2635·8		10	3217·4		10	3881·6		10	4669·9		10	5657·6	
20	2648·9		20	3232·1		20	3898·7		20	4690·7		20	5684·6	
30	2662·0		30	3246·9		30	3915·9		30	4711·6		30	5711·8	
40	2675·2		40	3261·7		40	3933·2		40	4732·6		40	5739·2	
50	2688·4		50	3276·6		50	3950·6		50	4753·7		50	5766·8	
41 0	2701·6	15·1	48 0	3291·5	17·1	55 0	3968·0	18·8	62 0	4775·0	20·4	69 0	5794·6	21·6
10	2714·9		10	3306·5		10	3985·5		10	4796·3		10	5822·6	
20	2728·2		20	3321·5		20	4003·0		20	4817·8		20	5850·8	
30	2741·5		30	3336·6		30	4020·6		30	4839·4		30	5879·2	
40	2754·9		40	3351·7		40	4038·3		40	4861·1		40	5907·9	
50	2768·3		50	3366·7		50	4056·1		50	4882·9		50	5936·8	
42 0	2781·7	15·4	49 0	3381·8	17·4	56 0	4073·9	19·1	63 0	4904·9	20·5	70 0	5965·9	21·7

Tafel 11 (pag. 120, 250).

φ	y	ξ	φ	y	ξ	φ	y	ξ	φ	y	ξ	φ	y	ξ
70° 0'	5965·9'	21·7'	74° 0'	6745·8'	22·2'	78° 0'	7744·6'	22·6'	82° 0'	9145·5'	22·9'	86° 0'	11532·5'	23·0'
10	5995·3		10	6782·3		10	7793·0		10	9218·1		10	11678·9	
20	6024·9		20	6819·1		20	7842·1		20	9292·2		20	11831·9	
30	6054·7		30	6856·3		30	7891·9		30	9368·0		30	11991·9	
40	6084·8		40	6893·9		40	7942·4		40	9445·5		40	12159·7	
50	6115·1		50	6931·9		50	7993·7		50	9524·7		50	12336·2	
71 0	6145·7	21·8	75 0	6970·3	22·3	79 0	8045·7	22·6	83 0	9605·8	22·9	87 0	12522·1	23·0
10	6176·6		10	7009·2		10	8098·5		10	9688·9		10	12718·7	
20	6207·7		20	7048·5		20	8152·1		20	9773·9		20	12927·2	
30	6239·0		30	7088·2		30	8206·6		30	9861·2		30	13149·1	
40	6270·7		40	7128·4		40	8261·9		40	9950·7		40	13386·4	
50	6302·6		50	7169·0		50	8318·1		50	10042·5		50	13641·2	
72 0	6334·8	21·9	76 0	7210·1	22·4	80 0	8375·2	22·7	84 0	10136·9	22·9	88 0	13916·4	23·0
10	6367·4		10	7251·7		10	8433·3		10	10233·9		10	14215·6	
20	6400·2		20	7293·7		20	8492·3		20	10333·7		20	14543·3	
30	6433·3		30	7336·3		30	8552·4		30	10436·5		30	14905·6	
40	6466·7		40	7379·4		40	8613·5		40	10542·5		40	15310·5	
50	6500·4		50	7423·0		50	8675·7		50	10651·8		50	15769·6	
73 0	6534·4	22·0	77 0	7467·2	22·5	81 0	8739·1	22·8	85 0	10764·6	23·0	89 0	16299·6	23·1
10	6568·8		10	7512·0		10	8803·6		10	10881·3		10	16926·4	
20	6603·5		20	7557·3		20	8869·3		20	11002·1		20	17693·5	
30	6638·5		30	7603·2		30	8936·3		30	11127·2		30	18682·5	
40	6673·9		40	7649·7		40	9004·7		40	11257·1		40	20076·4	
50	6709·7		50	7696·8		50	9074·3		50	11392·1		50	22459·3	23·1
74 0	6745·8	22·2	78 0	7744·6	22·6	82 0	9145·5	22·9	86 0	11532·5	23·0	90 0	∞	

Tafel 11a (pag. 113).

$k = \sec\varphi, \quad K = \sec\varphi^2$

φ	k	K
0°	1·00000	1·00000
10	1·01543	1·03109
20	1·06418	1·13247
30	1·15470	1·33333
40	1·30541	1·70409
50	1·55572	2 42028
60	2·00000	4·00000
70	2·92380	8·54863
80	5·75877	33·16344
90	∞	∞

Tafel 12 (pag. 126).

$x = \text{arc cot} (\cos \lambda \cot \varphi)$

$\varphi =$	$\lambda = 0^0$	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80^0	90^0
0^0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
10	0.1745	0.1772	0.1854	0.2009	0.2262	0.2677	0.3390	0.4860	0.7930	1.5708
20	0.3491	0.3540	0.3695	0.3978	0.4436	0.5152	0.6292	0.8165	1.1126	1.5708
30	0.5236	0.5303	0.5509	0.5888	0.6459	0.7318	0.8571	1.0360	1.2746	1.5708
40	0.6982	0.7057	0.7289	0.7696	0.8309	0.9170	1.0336	1.1838	1.3670	1.5708
50	0.8727	0.8802	0.9031	0.9434	0.9995	1.0762	1.1737	1.2913	1.4261	1.5708
60	1.0472	1.0538	1.0737	1.1071	1.1543	1.2154	1.2898	1.3758	1.4709	1.5708
70	1.2217	1.2265	1.2413	1.2655	1.2989	1.3410	1.3908	1.4470	1.5077	1.5708
80	1.3962	1.3989	1.4065	1.4192	1.4367	1.4579	1.4829	1.5106	1.5402	1.5708
90	1.5708	1.5708	1.5708	1.5708	1.5708	1.5708	1.5708	1.5708	1.5708	1.5708

$$y = \tfrac{1}{2} \log_n \frac{1 + \cos \varphi \sin \lambda}{1 - \cos \varphi \sin \lambda}$$

$\varphi =$	$\lambda = 0^0$	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80^0	90^0
0^0	0.0000	0.1754	0.3564	0.5493	0.7629	1.0107	1.3169	1.7354	2.4362	∞
10	0.0000	0.1727	0.3505	0.5393	0.7464	0.9831	1.2689	1.6255	2.0897	2.4362
20	0.0000	0.1647	0.3332	0.5099	0.6995	0.9073	1.1382	1.3894	1.6255	1.7354
30	0.0000	0.1515	0.3053	0.4636	0.6281	0.7989	0.9730	1.1382	1.2689	1.3169
40	0.0000	0.1338	0.2683	0.4036	0.5392	0.6728	0.7989	0.9073	0.9831	1.0107
50	0.0000	0.1121	0.2236	0.3332	0.4394	0.5392	0.6281	0.6995	0.7464	0.7629
60	0.0000	0.0870	0.1727	0.2554	0.3332	0.4036	0.4636	0.5099	0.5393	0.5493
70	0.0000	0.0595	0.1175	0.1727	0.2236	0.2683	0.3053	0.3332	0.3505	0.3564
80	0.0000	0.0302	0.0595	0.0870	0.1121	0.1338	0.1515	0.1647	0.1727	0.1754
90	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Tafel 13 (pag. 103, 136, 158, 174, 185).

$$\varrho = \frac{\cot \varphi}{\operatorname{arc} 1^0}; \quad g_\varphi = \cos \varphi$$

φ	ϱ	g_φ	φ	ϱ	g_φ	φ	ϱ	g_φ
0°	∞	1.00000	30	99.239	0.86603	60	33.080	0.50000
1	3282.473	0.99985	31	95.356	0.85717	61	31.760	0.48481
2	1640.736	0.99939	32	91.692	0.84805	62	30.465	0.46947
3	1093.268	0.99863	33	88.228	0.83867	63	29.194	0.45399
4	819.368	0.99756	34	84.944	0.82904	64	27.945	0.43837
5	654.894	0.99619	35	81.827	0.81915	65	26.717	0.42262
6	545.133	0.99452	36	78.861	0.80902	66	25.510	0.40674
7	466.637	0.99255	37	76.034	0.79864	67	24.321	0.39073
8	407.681	0.99027	38	73.335	0.78801	68	23.149	0.37461
9	361.751	0.98769	39	70.754	0.77715	69	21.994	0.35837
10	324.940	0.98481	40	68.282	0.76604	70	20.854	0.34202
11	294.761	0.98163	41	65.911	0.75471	71	19.729	0.32557
12	269.556	0.97815	42	63.633	0.74314	72	18.617	0.30902
13	248.175	0.97437	43	61.442	0.73135	73	17.517	0.29237
14	229.801	0.97030	44	59.331	0.71934	74	16.429	0.27564
15	213.831	0.96593	45	57.296	0.70711	75	15.352	0.25882
16	199.814	0.96126	46	55.330	0.69466	76	14.285	0.24192
17	187.406	0.95630	47	53.429	0.68200	77	13.228	0.22495
18	176.338	0.95106	48	51.589	0.66913	78	12.179	0.20791
19	166.399	0.94552	49	49.806	0.65606	79	11.137	0.19081
20	157.419	0.93969	50	48.077	0.64279	80	10.103	0.17365
21	149.261	0.93358	51	46.397	0.62932	81	9.075	0.15643
22	141.812	0.92718	52	44.764	0.61566	82	8.052	0.13917
23	134.980	0.92050	53	43.175	0.60182	83	7.035	0.12187
24	128.688	0.91355	54	41.628	0.58779	84	6.022	0.10453
25	122.871	0.90631	55	40.119	0.57358	85	5.013	0.08716
26	117.474	0.89879	56	38.646	0.55919	86	4.007	0.06976
27	112.449	0.89101	57	37.208	0.54464	87	3.003	0.05234
28	107.758	0.88295	58	35.802	0.52992	88	2.001	0.03490
29	103.364	0.87462	59	34.427	0.51504	89	1.000	0.01745
30	99.239	0.86603	60	33.080	0.50000	90	0.000	0.00000

Tafel 14 (pag. 93, 137, 158, 184).

$$\varrho_\varphi = \frac{\cot\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}}\,; \quad l_\varphi = \frac{1-\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}\,; \quad l'_\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}}$$

φ	ϱ_φ	l_φ	l'_φ	φ	ϱ_φ	l_φ	l'_φ	φ	ϱ_φ	l_φ	l'_φ
0°	∞	0·99332	1·00000	30°	99·322	0·99581	0·86675	60°	33·163	1·00083	0·50126
1	3282·476	0·99333	0·99985	31	95·441	0·99596	0·85792	61	31·841	1·00098	0·48605
2	1640·744	0·99334	0·99939	32	91·778	0·99612	0·84884	62	30·544	1·00113	0·47070
3	1093·279	0·99336	0·99864	33	88·315	0·99628	0·83949	63	29·271	1·00127	0·45520
4	819·381	0·99338	0·99758	34	85·033	0·99644	0·82990	64	28·021	1·00141	0·43956
5	654·910	0·99340	0·99622	35	81·916	0·99661	0·82005	65	26·791	1·00155	0·42378
6	545·153	0·99343	0·99456	36	78·952	0·99678	0·80995	66	25·581	1·00169	0·40787
7	466·660	0·99347	0·99259	37	76·126	0·99695	0·79960	67	24·390	1·00182	0·39184
8	407·707	0·99351	0·99033	38	73·428	0·99711	0·78901	68	23·216	1·00194	0·37569
9	361·781	0·99356	0·98777	39	70·848	0·99728	0·77818	69	22·059	1·00206	0·35942
10	324·973	0·99362	0·98491	40	68·377	0·99745	0·76710	70	20·916	1·00217	0·34303
11	294·797	0·99369	0·98175	41	66·006	0·99762	0·75579	71	19·788	1·00228	0·32654
12	269·594	0·99376	0·97829	42	63·729	0·99779	0·74426	72	18·673	1·00239	0·30995
13	248·217	0·99383	0·97453	43	61·538	0·99796	0·73250	73	17·571	1·00249	0·29326
14	229·846	0·99391	0·97048	44	59·427	0·99814	0·72050	74	16·480	1·00259	0·27649
15	213·879	0·99399	0·96614	45	57·392	0·99832	0·70828	75	15·400	1·00268	0·25963
16	199·865	0·99408	0·96151	46	55·426	0·99850	0·69586	76	14·330	1·00276	0·24269
17	187·460	0·99417	0·95658	47	53·525	0·99868	0·68322	77	13·270	1·00284	0·22567
18	176·394	0·99427	0·95136	48	51·685	0·99885	0·67037	78	12·218	1·00291	0·20858
19	166·458	0·99438	0·94585	49	49·901	0·99902	0·65731	79	11·173	1·00298	0·19142
20	157·480	0·99449	0·94006	50	48·171	0·99919	0·64405	80	10·136	1·00305	0·17421
21	149·325	0·99460	0·93397	51	46·491	0·99936	0·63059	81	9·105	1·00311	0·15695
22	141·878	0·99472	0·92760	52	44·857	0·99953	0·61694	82	8·079	1·00316	0·13963
23	135·049	0·99484	0·92095	53	43·267	0·99970	0·60310	83	7·058	1·00321	0·12227
24	128·759	0·99497	0·91403	54	41·719	0·99987	0·58908	84	6·042	1·00325	0·10488
25	122·944	0·99510	0·90683	55	40·209	1·00004	0·57488	85	5·030	1·00328	0·08745
26	117·549	0·99524	0·89937	56	38·735	1·00021	0·56048	86	4·020	1·00330	0·06999
27	112·527	0·99538	0·89162	57	37·296	1·00037	0·54592	87	3·013	1·00333	0·05251
28	107·838	0·99552	0·88360	58	35·889	1·00053	0·53120	88	2·008	1·00334	0·03502
29	103·445	0·99566	0·87531	59	34·512	1·00068	0·51631	89	1·004	1·00335	0·01751
30	99·322	0·99581	0·86675	60	33·163	1·00083	0·50126	90	0·000	1·00335	0·00000

Tafel 15a (pag. 157).

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{1}{\lambda \sin \varphi}$$

Werte von Θ.

λ	$\varphi = 0^0$	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80^0	90^0
0^0	90° 0′ 0″	90° 0′ 0″	90° 0′ 0″	90° 0′ 0″	90° 0′ 0″	90° 0′ 0″	90° 0′ 0″	90° 0′ 0″	90° 0′ 0″	90° 0′ 0″
10	90 0 0	88 15 51	86 35 2	85 0 45	83 35 56	82 23 5	81 24 17	80 41 0	80 14 50	80 5 59
20	90 0 0	86 31 53	83 11 31	80 5 55	77 21 13	75 1 46	73 10 48	71 50 23	71 1 44	70 45 28
30	90 0 0	84 48 17	79 50 49	75 19 45	71 23 55	68 8 39	65 36 29	63 48 6	62 43 21	62 21 48
40	90 0 0	83 5 16	76 34 14	70 45 28	65 49 55	61 51 44	58 50 34	56 44 2	55 29 26	55 4 48
50	90 0 0	81 22 59	73 22 53	66 25 37	60 42 37	56 14 14	52 55 11	50 38 49	49 19 27	48 53 24
60	90 0 0	79 41 37	70 17 40	62 21 48	56 3 16	51 15 48	47 47 42	45 27 39	44 7 3	43 40 45
70	90 0 0	78 1 20	67 19 19	58 34 51	51 51 25	46 53 47	43 23 4	41 3 26	39 43 53	39 18 3
80	90 0 0	76 22 16	64 28 24	55 4 48	48 5 31	43 4 26	39 35 26	37 18 48	36 1 35	35 36 37
90	90 0 0	74 44 34	61 45 12	51 51 14	44 43 26	39 43 42	36 19 11	34 7 0	32 52 49	32 28 54
100	90 0 0	73 8 22	59 9 56	48 53 24	41 42 46	36 47 40	33 29 18	31 22 19	30 11 27	29 48 39
110	90 0 0	71 33 45	56 42 35	46 10 16	39 1 8	34 12 49	31 1 29	28 59 58	27 52 29	27 30 49
120	90 0 0	70 0 51	54 23 6	43 40 45	36 36 18	31 56 5	28 52 9	26 56 8	25 51 56	25 31 22
130	90 0 0	68 29 45	52 11 16	41 23 43	34 26 14	29 54 49	26 58 21	25 7 39	24 6 37	23 47 5
140	90 0 0	67 0 30	50 6 51	39 18 3	32 29 4	28 6 47	25 17 38	23 32 3	22 33 59	22 15 26
150	90 0 0	65 33 11	48 9 30	37 22 40	30 43 14	26 30 8	23 48 2	22 7 16	21 11 58	20 54 20
160	90 0 0	64 7 50	46 18 56	35 36 37	29 7 20	25 3 16	22 27 54	20 51 39	19 58 55	19 42 9
170	90 0 0	62 44 29	44 34 45	33 58 58	27 40 10	23 44 52	21 15 53	19 43 52	18 53 34	18 37 32
180	90 0 0	61 23 10	42 56 37	32 28 54	26 20 41	22 33 51	20 10 52	18 42 48	17 54 43	17 39 24

Tafel 15b (pag. 157).

$$\vartheta = \frac{\sin \Theta^2}{1 + \frac{1}{2}\sin 2\,\Theta}$$

Θ	ϑ	Θ	ϑ	Θ	ϑ
0°	0·00000	30°	0·17446	60°	0·52337
1	0·00031	31	0·18403	61	0·53718
2	0·00118	32	0·19375	62	0·55114
3	0·00260	33	0·20362	63	0·56524
4	0·00455	34	0·21365	64	0·57950
5	0·00699	35	0·22383	65	0·59391
6	0·00990	36	0·23415	66	0·60847
7	0·01325	37	0·24461	67	0·62318
8	0·01702	38	0·25522	68	0·63805
9	0·02119	39	0·26596	69	0·65307
10	0·02575	40	0·27685	70	0·66825
11	0·03066	41	0·28788	71	0·68358
12	0·03592	42	0·29904	72	0·69906
13	0·04151	43	0·31033	73	0·71470
14	0·04740	44	0·32176	74	0·73048
15	0·05359	45	0·33333	75	0·74641
16	0·06006	46	0·34504	76	0·76249
17	0·06680	47	0·35688	77	0·77871
18	0·07380	48	0·36885	78	0·79508
19	0·08105	49	0·38096	79	0·81158
20	0·08853	50	0·39321	80	0·82821
21	0·09623	51	0·40559	81	0·84497
22	0·10415	52	0·41811	82	0·86185
23	0·11228	53	0·43077	83	0·87884
24	0·12062	54	0·44358	84	0·89593
25	0·12915	55	0·45652	85	0·91312
26	0·13785	56	0·46960	86	0·93039
27	0·14674	57	0·48283	87	0·94773
28	0·15581	58	0·49620	88	0·96512
29	0·16505	59	0·50972	89	0·98255
30	0·17446	60	0·52337	90	1·00000

Tafel 16 (pag. 163).

$$2\vartheta + \sin 2\vartheta = \pi \sin \varphi$$

φ	ϑ	sin ϑ	cos ϑ	φ	ϑ	sin ϑ	cos ϑ	φ	ϑ	sin ϑ	cos ϑ
0°	0° 0′ 0″	0·00000	1·00000	30°	23° 49′ 36″	0·40397	0·91477	60°	49° 40′ 31″	0·76239	0·64712
1	0 47 8	0·01371	0·99991	31	24 38 26	0·41693	0·90894	61	50 37 1	0·77292	0·63450
2	1 34 15	0·02741	0·99962	32	25 27 24	0·42983	0·90291	62	51 34 1	0·78333	0·62160
3	2 21 24	0·04112	0·99915	33	26 16 30	0·44268	0·89668	63	52 31 32	0·79362	0·60841
4	3 8 32	0·05481	0·99850	34	27 5 43	0·45547	0·89025	64	53 29 37	0·80379	0·59491
5	3 55 41	0·06851	0·99765	35	27 55 5	0·46820	0·88362	65	54 28 17	0·81382	0·58111
6	4 42 52	0·08219	0·99662	36	28 44 35	0·48088	0·87678	66	55 27 35	0·82373	0·56699
7	5 30 4	0·09586	0·99539	37	29 34 15	0·49350	0·86975	67	56 27 33	0·83349	0·55253
8	6 17 17	0·10953	0·99398	38	30 24 5	0·50606	0·86250	68	57 28 13	0·84311	0·53774
9	7 4 32	0·12318	0·99238	39	31 14 6	0·51855	0·85505	69	58 29 39	0·85259	0·52259
10	7 51 49	0·13681	0·99060	40	32 4 17	0·53097	0·84739	70	59 31 54	0·86191	0·50706
11	8 39 7	0·15043	0·98862	41	32 54 38	0·54333	0·83952	71	60 35 3	0·87108	0·49114
12	9 26 27	0·16403	0·98645	42	33 45 11	0·55562	0·83144	72	61 39 9	0·88008	0·47482
13	10 13 50	0·17761	0·98410	43	34 35 57	0·56783	0·82314	73	62 44 16	0·88892	0·45806
14	11 1 16	0·19117	0·98156	44	35 26 56	0·57998	0·81463	74	63 50 30	0·89758	0·44085
15	11 48 45	0·20471	0·97882	45	36 18 8	0·59204	0·80591	75	64 57 58	0·90606	0·42316
16	12 36 18	0·21823	0·97590	46	37 9 34	0·60403	0·79696	76	66 6 47	0·91434	0·40494
17	13 23 54	0·23172	0·97278	47	38 1 13	0·61594	0·78779	77	67 17 5	0·92243	0·38615
18	14 11 33	0·24518	0·96947	48	38 53 7	0·62776	0·77840	78	68 29 0	0·93031	0·36677
19	14 59 16	0·25861	0·96598	49	39 45 18	0·63951	0·76879	79	69 42 49	0·93797	0·34671
20	15 47 3	0·27201	0·96229	50	40 37 45	0·65116	0·75894	80	70 58 42	0·94540	0·32592
21	16 34 55	0·28538	0·95841	51	41 30 29	0·66272	0·74886	81	72 16 58	0·95257	0·30432
22	17 22 51	0·29872	0·95434	52	42 23 31	0·67420	0·73855	82	73 38 1	0·95948	0·28178
23	18 10 52	0·31202	0·95008	53	43 16 52	0·68558	0·72800	83	75 2 23	0·96610	0·25815
24	18 58 58	0·32528	0·94562	54	44 10 33	0·69686	0·71721	84	76 30 36	0·97241	0·23327
25	19 47 10	0·33851	0·94096	55	45 4 34	0·70804	0·70617	85	78 3 46	0·97838	0·20684
26	20 35 27	0·35169	0·93612	56	45 58 57	0·71913	0·69488	86	79 43 16	0·98395	0·17844
27	21 23 50	0·36483	0·93108	57	46 53 43	0·73011	0·68333	87	81 31 9	0·98906	0·14748
28	22 12 18	0·37792	0·92584	58	47 48 53	0·74098	0·67153	88	83 31 58	0·99364	0·11264
29	23 0 53	0·39097	0·92040	59	48 44 29	0·75174	0·65946	89	85 55 33	0·99747	0·07105
30	23 49 36	0·40397	0·91477	60	49 40 31	0·76239	0·64712	90	90 0 0	1·00000	0·00000

$$\Delta\vartheta = -\frac{1}{6}\,\frac{\pi\varepsilon^2 \sin\varphi \cos\varphi^2}{\cos\vartheta^2}$$

φ	Δϑ	Δ sin ϑ	Δ cos ϑ	φ	Δϑ	Δ sin ϑ	Δ cos ϑ
0	− 0′ 0″	− 0	+ 0	50	− 6′ 36″	− 146	+ 125
10	− 2 4	− 59	+ 8	60	− 6 13	− 117	+ 138
20	− 3 55	− 110	+ 31	70	− 5 8	− 76	+ 127
30	− 5 23	− 143	+ 63	80	− 3 22	− 32	+ 92
40	− 6 19	− 156	+ 97	90	− 0 0	− 0	+ 0
50	− 6 36	− 146	+ 125				

Tafel 17 (pag. 169).

$$y = 1 - \sqrt{2}\,\sin\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\eta = -\tfrac{1}{8}\sqrt{2}\,\frac{\varepsilon^2 \sin\varphi \cos\varphi^2}{\sin\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}$$

φ	y	η
0°	0·00000	0
10	0·09096	— 41
20	0·18885	— 83
30	0·29290	— 118
40	0·40233	— 140
50	0·51632	— 146
60	0·63398	— 132
70	0·75443	— 100
80	0·87674	— 54
90	1·00000	0

Tafel 18 (pag. 246).

$$x = \frac{\varepsilon^2}{2}\sin 2v_3 + \tfrac{5}{48}\,\varepsilon^4\,(2\sin 2v_3 - \sin 4v_3)$$

v_3	arc x	x
0°	0·00000	0′ 0″
10	0·00114	3 56
20	0·00215	7 24
30	0·00289	9 56
40	0·00329	11 19
50	0·00329	11 19
60	0·00289	9 56
70	0·00215	7 24
80	0·00114	3 56
90	0·00000	0 0

Tafel 19 (pag. 267).

$$\xi_1 = \frac{\sqrt{\sin\left(45 + \frac{v}{2}\right)} - \sqrt{\sin\left(45 - \frac{v}{2}\right)}}{\sqrt{\sin\left(45 + \frac{v}{2}\right)} + \sqrt{\sin\left(45 - \frac{v}{2}\right)}}$$

$$\xi_2 = \frac{\sqrt{\sin\left(45 + \frac{v}{2}\right)} + \sqrt{\sin\left(45 - \frac{v}{2}\right)}}{\sqrt{\sin\left(45 + \frac{v}{2}\right)} - \sqrt{\sin\left(45 - \frac{v}{2}\right)}}$$

φ	ξ_1	ξ_2
0°	0·0000	∞
10	0·0438	22·8155
20	0·0889	11·2511
30	0·1365	7·3271
40	0·1884	5·3067
50	0·2475	4·0411
60	0·3178	3·1463
70	0·4086	2·4476
80	0·5435	1·8401
90	1·0000	1·0000

Tafel 20 (pag. 178).

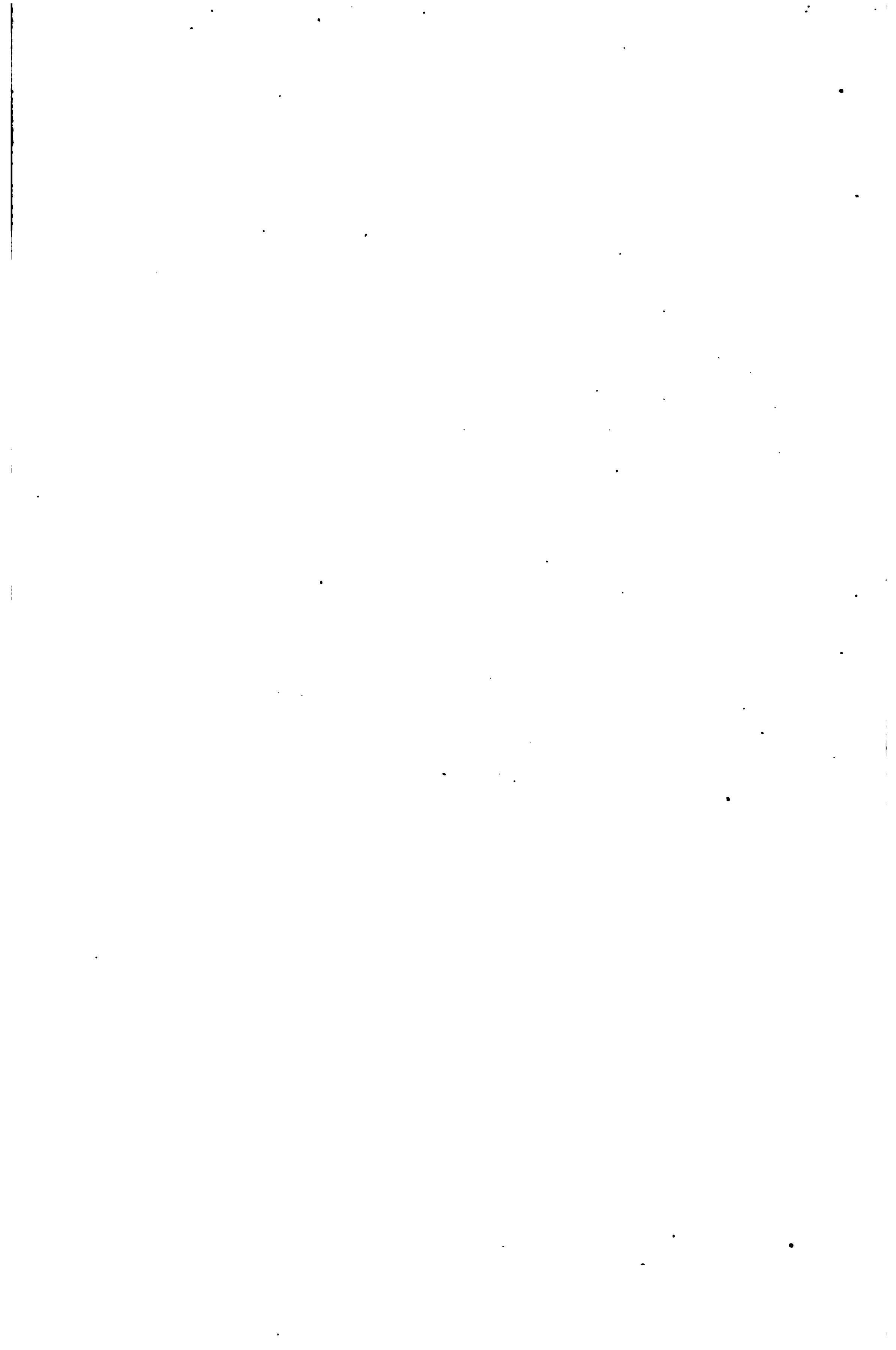
$\varrho = 2 \sin \frac{p}{2}$; $k_1 = \cos \frac{p}{2}$; $k_2 = \sec \frac{p}{2}$

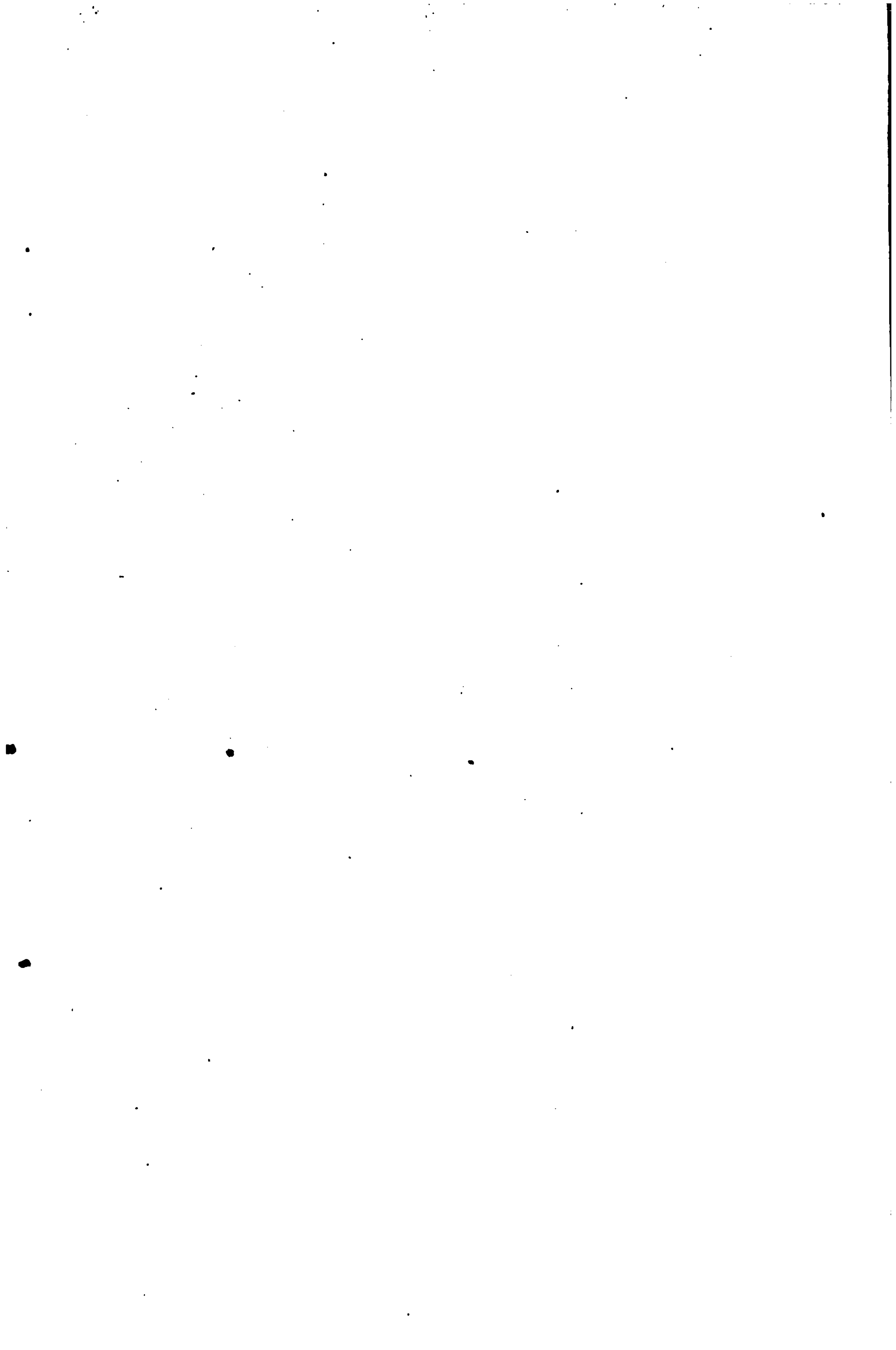
p	ϱ	k_1	k_2	$\frac{\delta}{2}$	ϱ'	k_1'	k_2'	$\frac{\delta'}{2}$
0°	0.00000	1.00000	1.00000	0° 0′ 0″	0.00000	1.00000	1.00000	0° 0′ 0″
10	0.17431	0.99619	1.00382	0 13 6	0.17487	0.99624	1.00378	0 12 58
20	0.34730	0.98481	1.01543	0 52 38	0.34831	0.98485	1.01538	0 52 28
30	0.51764	0.96593	1.03528	1 59 9	0.51891	0.96598	1.03522	1 58 58
40	0.68400	0.93969	1.06418	3 33 42	0.68532	0.93978	1.06408	3 33 23
50	0.84524	0.90631	1.10338	5 37 39	0.84626	0.90646	1.10319	5 37 4
60	1.00000	0.86603	1.15470	8 12 48	1.00054	0.86628	1.15436	8 11 41
70	1.14715	0.81915	1.22077	11 21 17	1.14703	0.81956	1.22017	11 19 37
80	1.28558	0.76604	1.30540	15 5 33	1.28471	0.76664	1.30439	15 2 58
90	1.41421	0.70711	1.41421	19 28 16	1.41262	0.70790	1.41262	19 24 37
100	1.53209	0.64279	1.55572	24 32 7	1.52988	0.64378	1.55333	24 27 17
110	1.63830	0.57358	1.74345	30 19 30	1.63564	0.57473	1.73993	30 13 30
120	1.73205	0.50000	2.00000	36 52 12	1.72913	0.50126	1.99497	36 45 16
130	1.81262	0.42262	2.36620	44 10 49	1.80965	0.42390	2.35907	44 3 22
140	1.87938	0.34202	2.92380	52 14 12	1.87652	0.34321	2.91363	52 6 50
150	1.93185	0.25882	3.86370	60 58 42	1.92918	0.25983	3.84869	60 52 10
160	1.96962	0.17365	5.75877	70 17 52	1.96715	0.17438	5.73459	70 12 59
170	1.99239	0.08716	11.47371	80 2 16	1.99008	0.08754	11.42327	79 59 39
180	2.00000	0.00000	∞	90 0 0	1.99775	0.00000	∞	90 0 0

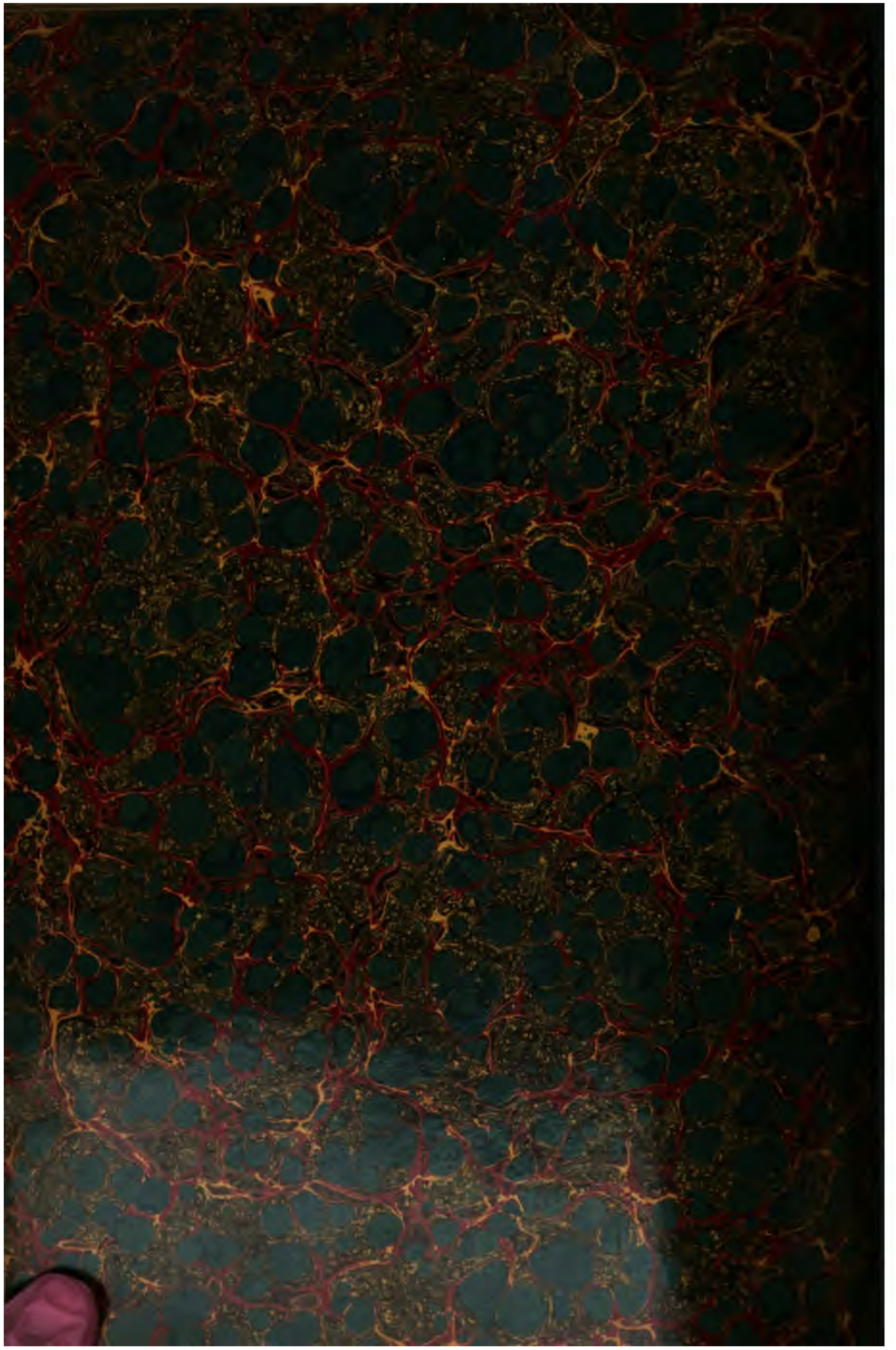
Tafel 21 (pag. 273).

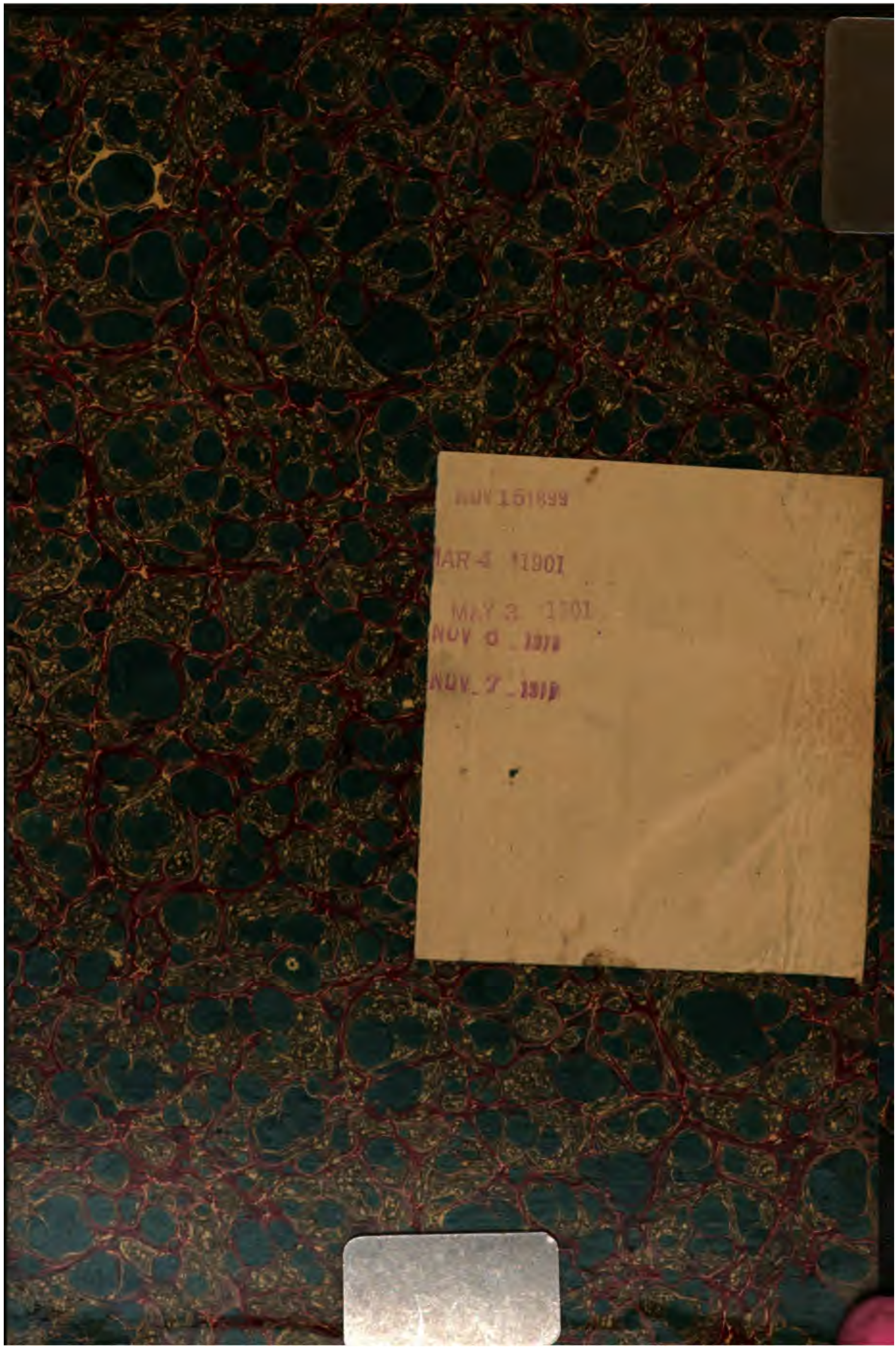
φ	$\lambda_x=0°$	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	$90°=\lambda_x$	φ
85°	0·033	0·033	0·033	0·032	0·031	0·030	0·029	0·027	0·025	0·024	0·021	0·019	0·017	0·014	0·011	0·009	0·006	0·003	0·000	85°
80	067	066	066	064	063	061	058	055	051	047	043	038	033	028	023	017	012	006	000	80
75	100	100	099	097	094	091	087	082	077	071	065	058	050	042	034	026	017	009	000	75
70	135	134	133	130	127	122	117	110	103	095	087	077	067	057	046	035	023	012	000	70
65	169	169	167	163	159	154	147	139	130	120	109	097	085	072	058	044	029	015	000	65
60	205	204	201	198	192	185	177	168	157	145	131	117	102	086	070	053	036	018	000	60
55	241	240	237	232	226	218	208	197	184	170	154	138	120	102	082	062	042	021	000	55
50	278	277	274	269	261	251	240	227	212	196	178	159	139	117	095	072	048	024	000	50
45	317	316	312	306	297	286	273	258	241	223	202	181	158	134	109	083	055	028	000	45
40	357	356	351	344	334	321	307	290	270	250	228	204	179	151	123	094	063	032	000	40
35	400	398	393	384	373	358	341	322	301	279	254	228	200	170	139	106	071	036	000	35
30	446	443	437	427	413	396	377	356	332	308	281	253	222	190	155	119	081	041	000	30
25	495	492	484	471	455	435	414	391	365	338	309	279	246	211	174	134	091	046	000	25
20	548	545	534	518	498	476	452	426	398	369	339	307	272	235	195	151	104	053	000	20
15	609	604	589	568	544	517	490	461	432	401	369	336	300	262	219	173	121	062	000	15
10	681	672	649	620	590	559	528	497	466	434	401	367	330	291	248	200	143	076	000	10
5	775	752	713	673	635	600	566	532	500	467	433	399	363	324	282	234	177	102	000	5
0	1·000	841	774	723	679	639	602	567	533	500	467	433	398	361	321	277	226	159	000	0
φ	$\lambda_y=90°$	85°	80°	75°	70°	65°	60°	55°	50°	45°	40°	35°	30°	25°	20°	15°	10°	5°	$0°=\lambda_y$	φ

φ	$\lambda_x=0°$	1°	2°	3°	4°	5°	6°	8°	10°	12½°	77½°	80°	82°	84°	85°	86°	87°	88°	$89°=\lambda_x$	φ
15°	0·609	0·609	0·608	0·607	0·606	0·604	0·602	0·596	0·589	0·579	0·147	0·121	0·098	0·074	0·062	0·050	0·038	0·025	0·013	15°
12½	643	643	642	641	639	636	634	627	618	606	159	131	107	082	069	055	042	028	014	12½
10	681	681	680	678	675	672	668	659	649	635	173	143	118	091	076	062	047	031	016	10
8	715	714	713	710	706	702	697	686	674	658	185	155	129	100	085	069	052	035	018	8
6	753	752	750	746	741	735	728	714	700	681	199	169	142	112	095	078	060	040	020	6
5	775	774	770	765	759	752	745	729	713	692	207	177	150	119	102	084	065	044	022	5
4	798	797	793	786	779	770	761	743	725	704	215	185	158	128	110	092	071	049	025	4
3	825	823	817	808	798	788	778	757	738	715	224	194	168	137	120	101	079	055	029	3
2	857	853	843	831	819	806	794	772	750	726	233	204	178	148	131	112	090	065	035	2
1	899	889	872	854	839	824	810	785	763	737	243	215	190	161	144	126	105	079	046	1
0	1·000	929	899	877	857	841	825	798	774	747	253	226	202	175	159	143	123	101	071	0
φ	$\lambda_y=90°$	89°	88°	87°	86°	85°	84°	82°	80°	77½°	12½°	10°	8°	6°	5°	4°	3°	2°	$1°=\lambda_y$	φ








NOV 15 1899
MAR 4 1901
MAY 3 1901
NOV 6 1919
NOV 7 1919

